数理解析研究所講究録
126巻 1971年 1-113

5月24日

最近は新しい学問がふえてきて、古いものは捨て去られる傾向にあるが、数学は数千年の昔から連綿として続いていて、今なお、おとろえていない。従って少しくらい古いことをするのも意味があろう。

数学の中で一番感銘をうけることは

1) 文字の使用による方程式の概念の成立。

2) 解析学(微分積分学)の成立。

解析学は歴史が古いにもかかわらず、十分開拓されつくしていないようである。又、他のより新しい分野でも general theory から一歩つきすゝんでゆけば、微分方程式の問題に帰着されることが多く、解析はすべての学問の基礎であるといえる。しかし、その重要な割には、体系がきちんとしていないで、再構成の必要がある。

再構成のためには、まず

数
関数
微分方程式

といった概念を定義する必要がある。しかし、従来の、

Cantor や Dedekind の基本列や切断による方法は不自然で本来の数の意味を歪曲している。19世紀までの古典的な解析学の内容をみると、数や函数の概念はもっと有機的であって、より素朴にとらえられていると知られる。しかし今そこまで立ち入っている時間はないので、一応このことだけを念頭においてほしい。

一方、代数幾何の方では数や函数概念の現代化が満足できる程度に達成されている。

例えば、「方程式

(1) $f_\alpha(x_1, \cdots, x_m) = 0$, $\alpha = 1, \cdots, r$

をとけ」という問題を考える。このとき

① 方程式とは何か？

② 解くとは何か？

これを別のことばで、いいかえてみよう。

Spinoza の同時代の人に Tschirnhaus という人がいて、方程式の変換論を考えている。つまり、

(2) $y_j = \varphi_j(x)$, $j = 1, \cdots, n$

とおいて、(1)と(2)から x を消去すると、y_j の間に成りたつべき関係式がえられる。これは Hilbert の基底定理によって、

有限個で十分であり，それを

(3) $\quad g_\beta(y_1,\cdots,y_n)=0 \quad , \quad \beta=1,\cdots,s$

とかく。この(3)の方で解いて，何かがわかれば，(1)の解についてもわかる、というのがTschirnhaus transformationの原理である。実際，三次方程式や四次方程式はこうしてとかれている。さらに，場合によっては，

(4) $\quad x_i=\psi_i(y) \quad , \quad i=1,\cdots,m$

と逆にとくことができる場合がある。このときは(3)の解によって(1)の解がすべて知られるわけで，(1)と(3)とは"同じ"方程式と考えられる。

さて，有限生成の k-algebra

$$A=k[X_1,\cdots,X_n]/(f_1,\cdots,f_r)$$

($(f_1,\cdots,f_r)$ は $\{f_1,\cdots,f_r\}$ から生成されたideal。以下同じ)

及び

$$B=k[Y_1,\cdots,Y_n]/(g_1,\cdots,g_s)$$

を考えよう。すると，容易にわかるように

(5) (2)を与えること (i.e. Tschirnhaus変換を与えること) $\Longleftrightarrow$ BからAへの k-algebra homomorphismを与えること.

であり、(4)のように逆にとけるとは、AとBとが同型になることであるから、従って

(6)　方程式を与えること $\Longleftrightarrow$ 有限生成の(commutative) k-algebraを与えること。

に他ならない。これは又、schemeのことばでいえば

$(5)^{bis}$　(2)を与えること $\Longleftrightarrow$ $X = Spec(A)$ から $Y = Spec(B)$ へのmorphismを与えること。

$(6)^{bis}$　方程式を与えること $\Longleftrightarrow$ k 上代数的なaffine schemeを与えること。

一方、方程式をとくときは、$\mathbb{C}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ あるいは、p-進体等、ある考えている環 R を指定して、そこに値をもつ解を考える。解を与えるとは、

(7)　(a_i) $a_i \in R$,　$X_i \to a_i$　s.t. $f_\alpha(a_i) = 0$ を与える。

$\Longleftrightarrow$　$A = k[X_1, \cdots, X_n]/(f_1, \cdots, f_r) \longrightarrow R$
k-algebra homomorphismを与える
(ring theoretical interpretation)

$\Longleftrightarrow$　$Spec(R) \longrightarrow Spec(A)$, k-morphismを与える。
(geometical interpretation)

こうして、いろいろにいいかえることができるが、可換環や scheme の言葉を用いれば、方程式とか解とかが、その表示の仕方によらず intrisic にとらえることができるのである。

又、(7) において、$Hom_k(A, R)$ の元として解を考えると、A が「函数」で、R が「数」であるが、R はまた $Spec(R)$ として、scheme（多様体）とも考えられ、両者の区別が判然としなくなってくる。しかし、これはむしろ重要なことで、両者は切りはなして別々に定義されるべきではなく、互いに関連しあって定められる性質のものである。

解析の方でも、こうして、数や函数、微分方程式は互いに関連しあって定義されるべきものである。今、そこに立ち入っている余裕はないが、少し微分方程式について話をしよう。

Oswald Veblen, "Invariants of quadratic differential forms" の中に微分幾何の問題が、なぜ微分方程式に帰着されるかがうまく説明してある。この中に、mixed system についての例がある。 mixed system.

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial z_\alpha}{\partial x_i} = f_{\alpha i}(x, z), & \begin{pmatrix} \alpha = 1, \cdots, n, \\ i = 1, \cdots, m, \end{pmatrix} \quad (8) \\[2em]
g_\gamma(x, z) = 0, & \gamma = 1, \cdots, r, \quad (9)
\end{cases}
$$

をとけ。すなわち、

$$(10) \qquad z_\alpha = \varphi_\alpha(x) \qquad , \alpha = 1, \cdots, n$$

を求めよ、という問題を考えよう。

ところで、大切なのは、(9)のような関係式は、これのみにとどまらず、これがとけるためには他にてきとうな、compatibility condition が必要とされることである。たとえば、(9)に(10)を代入した

$$g_\gamma(x, , \varphi_\alpha(x)) = 0 \quad ,$$

の両辺を x_i で偏微分して、(8)とあわせれば、

$$\frac{\partial g_\gamma}{\partial x_i} + \sum_{\alpha=1}^{n} f_{\alpha i}(x, z) \frac{\partial g_\gamma}{\partial z_\alpha} = 0$$

これはもう微分の入っていない

$$g'_{i\gamma}(x, z) = 0$$

という関係式になる。さらに、(8)式に(10)を代入して x_j で偏微分すれば

$$\frac{\partial z_\alpha}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial f_{\alpha i}}{\partial x_j} + \sum_\beta \frac{\partial z_\beta}{\partial x_j} \frac{\partial f_{\alpha i}}{\partial z_\beta}$$

i と j とをいれかえても等しいゆえ、(8)とあわせて、

$$\frac{\partial f_{\alpha i}}{\partial x_j}+\sum_\beta f_{\beta j}\frac{\partial f_{\alpha i}}{\partial z_\beta}-\frac{\partial f_{\alpha j}}{\partial x_i}-\sum_\beta f_{\beta i}\frac{\partial f_{\alpha j}}{\partial z_\beta}=0$$

これも、x と z のあいだの 代数的な(微分を含まぬという意味)関係式を与えている。こうして、必要な関係式はどんどんふえていくが、解析函数の germ の category などできとうなところで考えれば、代数的関係式のつくるイデアルは、有限生成になり、従って有限個の手続ののちにはもう新しい関係式はふえなくなる。こうなったとき、この system を、system of involution (包合系、縮閉系)とよぶ。

これを幾何的に考えれば、affine 空間内の(9)によってきまる多様体内で、(8)をみたす積分多様体で n 次元のものをもとめることが、mixed system をとくことになる。そして、上の事情は積分多様体が、(9)できまる多様体より、実は、さらに小さい多様体内に入っていることを示している。この積分多様体が自由に存在するようなより小さい多様体をもとめることが、与えられた方程式系から出発して、包合系を求めることに他ならない。

上の(8)を Pfaff 系を用いて全微分方程式の形でかけば、

(11) $$dz_\alpha-\sum f_{\alpha i}(x,z)dx_i=0 \qquad (\alpha=1,\dots,n)$$

となる。z_α, x_i をこみにして通し番号をつけて

$$(u_k) = (z_1, \cdots, z_n, x_1, \cdots, x_m) \qquad (k=1,\cdots,n+m)$$

とかけば、(11)は

$$(11)^{bis} \qquad \sum_k \varphi_{\alpha k}(u)\,du_k = 0, \quad \alpha = 1, \ ,n$$

とみなせる。又 $(11)^{bis}$ の形に一般化しても、たとえば

$$\det_{1\leq\alpha,k\leq n}(\varphi_{\alpha k}(u)) \neq 0$$

であれば、座標変換によって

$$\varphi_{\alpha k}(u) = \delta_{\alpha k} \qquad (\text{Kronecker "}\delta\text{"})$$

とできて、これは(11)の形に他ならないから、(11)と$(11)^{bis}$は同じことをいっているにすぎない。

ただ、(8)×(9)に於ては、mコの独立変数をとったわけで、これは考えている積分多様体がm次元であるということを了解しているのであるが、$(11)^{bis}$ の形にしたときは求める積分多様体の次元はとわれない。一般には Cauchy-Kowalevsky によって、次元の低いものから順にきめてゆく。そして、ここで、方程式系が完全積分可能というのが、先のいみで包合系であることに他ならない。

こうして、微分幾何のいろいろな問題、たとえば、二つの

Riemannian manifold が同型であるかどうか、というようなことは、こんな微分方程式に帰着される。

これをさらに一般的にして、体系的に代数的考察をしたのが、E. Cartan で、そのことは彼の

"*Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques.*"

に説かれている。この本では前半に最も一般的な方程式系を扱い、後半にその微分幾何学への応用をのべている。(微分幾何は結局 微分方程式に帰着されるので、その重要性は、昨年の Nice の congress で Chern が力説していたことでもある。)

彼のあつかうのは最も一般的な形である。このとき高階の微分が入ってもよいが、これは未知函数をふやせば、少なくとも local には一階にかきなおせる。例えば、

$$\frac{\partial z_\alpha}{\partial x_i \partial x_j} = f_{\alpha ij}\left(x, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} z_{\alpha i} = \dfrac{\partial z_\alpha}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial z_{\alpha i}}{\partial x_j} = \dfrac{\partial z_{\alpha j}}{\partial x_i} = f_{\alpha ij}(x, z, z_{\alpha i}) \end{cases}$$

従って、最も一般的な微分方程式の形は

$$(12) \qquad F_\alpha\left(x, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0 \qquad \alpha = 1, 2, \cdots$$

とかける。このとき、(12)をみたす

$$z_j = f_j(x)$$

を求めようということになる。ところで、(12)は、

$$(12)^{bis} \quad \begin{cases} F_\alpha(x, z, p) = 0 & \alpha = 1, 2, \cdots \\ dz_j - \Sigma p_{ji}\, dx_i = 0 & i, j = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

と同値であり、この表示は全く一般的な方程式をその代数的部分と全微分方程式の部分にわけてあらわしたことになる。このとき $(12)^{bis}$ をみたす積分多様体を求めることが、これをとくことになる。

これは無論一般的にはできなくて、Cartan は正則な integral element という概念を導入して、その限定のもとにこれをといた。これは本質的には Cauchy-Kovalevskaja であって、低い次元の積分多様体から順々に求めてゆくとき、各段階で C-K の定理がつかえる条件として、上の限定がでてきたのであった。従って Cartan のやったのは algebraic ないわゆる "general non-sense" の部分であるが、しかし

"nonsense" というのは大切なことである。

こうして一般の方程式に於ても $(12)^{bis}$ の解としての m 次元積分多様体を求めることに帰着するのであるが、このとき、先の mixed system の場合のように、どんどん必要な関係式をふやしていって、system of involution に到達する方法はやさしくない。これは いわゆる prolongation の問題で、Cartan が特別な場合に解いたあと、… 松島，倉西にうけつがれ最終的に倉西と 松田（道彦）により、ひととおりの完成をみた。このときは方程式のみならず、変数をもふやす必要がある。はじめは jet をつかっていたがのち tangent bundle の各 fibre の linear space 全体からなる Graßmann fibre space 上に方程式を変換してゆく方法をとっている。しかし、これも、もっと intrisic にとらえなおすことができるように思われる。

しかし、一つだけ例外があって非常に良くできている部分がある。それは未知函数が一コの場合で、いわゆる Jacobi の接触変換の理論といわれるものである。すなわち、

$$
(13)\quad \begin{cases} F_\alpha(x_1, \cdots, x_m, z, p, \cdots, p_m) = 0 \\ \\ dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_m dx_m = 0 \end{cases}
$$

を，とけ，というのである。これは，すでに $(2n+1)$ 次元の ambient space の中で話が閉じていて，変数をふやす必要がない。これは 我々の最近の仕事と関係がふかく，後でふれる。

解の一つを $z=\varphi(x)$ とすれば

$$(14) \qquad p_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

(13) の上式の左辺に (14) を代入して，x_i で偏微分してから $\partial F_\beta / \partial p_i$ をかけると，

$$(15) \qquad \frac{\partial F_\beta}{\partial p_i}\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F_\alpha}{\partial z}\right) + \sum_j \frac{\partial p_j}{\partial x_i} \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_j} \frac{\partial F_\beta}{\partial p_i} = 0$$

ところで

$$\frac{\partial p_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial p_i}{\partial x_j}$$

であるから，(15)式を i について加えてやると，その末尾の項は α と β を入れかえても同じであり，辺々を相引けば，

$$(16) \quad \sum_i \left(\frac{\partial F_\beta}{\partial p_i}\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F_\alpha}{\partial z}\right) - \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_i}\left(\frac{\partial F_\beta}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F_\beta}{\partial z}\right)\right) = 0$$

この左辺を $[F_\beta, F_\alpha]$ とかき Lagrange の bracket とよぶ。これから，

$$F_\alpha = 0, \ F_\beta = 0 \implies [F_\alpha, F_\beta] = 0$$

がえられる。しかし、この操作を何度かくりかえせば、前にのべたようなてきとうな有限性の条件のもとでは、あらたに bracket をつくっても、それが新しい関係式にならないようになる。このとき、この新しい系を Jacobi の system of involution とよぶ。そして、この零点としてきまる部分多様体は、もし空でないならば m 次元以上で、従って余次元 d は $m+1$ 以下であり、その中に d 次元の積分多様体が family になってこれをうめつくしている。この parameter は bicharacteristic とよばれるものに対応する。

このとき注意すべきことは、この $2m+1$ コの変数のうち、独立変数、従属変数の区別はあいまいである点である。丁度物理の正準変換で、位置と運動量とが全く入れかわってしまうようなものが存在することに対応している。こうして独立変数、従属変数という区別をはなれて（13）のような system を考えて、接触変換あるいは接触多様体といった上で問題を考えるのが Jacobi や Lie らの立場である。

Cartan は、この Jacobi のやり方を一般化しようとしたが、ごく概括的な理論、いわゆる Cartan-Kähler の存在定理を示すにとどまった。倉西らの理論も、一応の完成をみたとはいえ、prolongation の問題とは、いわば出発点である。接触変換にあたる本当の構造論については、まだまだこれからの問題なのである。

さて、特に、線型微分方程式について、先にのべた、Tschirnhaus 変換と同じことを考えよう。

一般の線型偏微分作用素は

$$P(x, D)$$

とあらわせる。これは多様体 X 上の偏微分作用素 D の多項式で、係数が、例えば、analytic なものである。この全体のつくる層を $\mathcal{D}_X$ であらわす。この pair $(X, \mathcal{D}_X)$ が基礎になる。

一般の線型偏微分方程式は

$$(17) \qquad \sum_\alpha P_{\beta\alpha}(x, D)\, u_\alpha = 0 \qquad \begin{array}{l} \alpha = 1, \cdots, r \\ \beta = 1, \cdots, s \end{array},$$

とかかれ、これをとくとは、(17)をみたす

$$(18) \qquad u_\alpha = \varphi_\alpha(x)$$

を求めることである。

ここで、

$$(19) \qquad v_\gamma = \sum_\alpha R_{\gamma\alpha}(x, D)\, u_\alpha$$

とおいたとき、u_α を消去できて、

(20) $$\sum_{\gamma} Q_{\delta\gamma}(x, D) v_{\alpha} = 0$$

なる式がえられることがある。これが、先のTschirnhaus変換にあたる。時には、(19), (20) が逆にとけて、

(21) $$u_{\alpha} = \sum_{\gamma} S_{\alpha\gamma}(x, D) v_{\gamma}$$

とかける場合があり、このときは、(17)と(19)とは"同じ"方程式の異った表現とみなければならない。

さて、free $\mathcal{D}$-module

$$\mathcal{D}_X u_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{D}_X u_r$$

の submodule $\mathcal{N}$ を、$\left(\sum_{\alpha} P_{\beta\alpha} u_{\alpha}\right)_{\beta=1,\dots,s}$ で生成されたものとしよう。そして

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{D}_X u_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{D}_X u_r / \mathcal{N} \\ &\underset{def}{=} \mathcal{D}_X u_1 + \cdots + \mathcal{D}_X u_r \end{aligned}$$

とおく。すると、もうこの $\mathcal{M}$ はさっきの方程式の場合と同じように、可逆なTschirnhaus変換によっては同型にうつるから、方程式を与えることによって intrinsic に定まってしまう。しかも、

$$
(22)\qquad
\begin{array}{ccccccc}
0 \longleftarrow & \mathcal{M} & \longleftarrow & \mathcal{D}^r & \longleftarrow & \mathcal{D}^s & \\
& \Psi & & \Psi & & \Psi & \\
& A_1u_1+\cdots+A_ru_r & \longleftarrow\!\! & (A_1,\cdots,A_r) & & & \text{(exact)} \\
& & & \Psi & & & \\
& & & \multicolumn{4}{l}{\left(\sum_\beta A_\beta P_{\beta 1},\cdots,\sum_\beta A_\beta P_{\beta r}\right) \longleftarrow\!\!\!\shortmid (A_1,\cdots,A_s)}
\end{array}
$$

であるから、$\mathcal{M}$は coherent な $\mathcal{D}$-module である。逆に$\mathcal{M}$が coherent-$\mathcal{D}$-module であれば、(localには)上のようにあらわせるから、従って、我々の立場では

<u>定義</u>： X上のLDE（線型微分方程式）とは coherent (left) $\mathcal{D}_X$-module のことである。

次に、解を与えることを考えよう。解は前と同様、ある定まった $\mathcal{D}_X$-module，たとえば analytic function $\mathcal{A}$，あるいはより広く hyperfunction $\mathcal{B}$ に於けるものを考える。これは

$$u_\alpha \longmapsto f_\alpha \in \mathcal{A} \text{ or } \mathcal{B}$$
$$(\alpha = 1,\cdots,r)$$

$$\text{s.t.}\quad \sum P_{\beta\alpha} f_\alpha = 0 \qquad \beta = 1,\cdots,s$$

を与えることであるから、(22)のいみを考えれば、これは

$\mathcal{M}$ から $\mathcal{A}$ 又は $\mathcal{B}$ への $\mathcal{D}$-homomorphism を与えることに他ならない。つまり、例えば、$\mathcal{A}$ での解を考えれば

(17) の global solution $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ の元

(17) の local solution $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ の local section.

ここまでいえば、微分方程式系をとく場合，homology 代数での Ext が出てくることは納得されると思う。この辺のことについては 60 年の東大の大談話会のとき、いろいろ Ext をつかった問題の formulation を述べた。最近、柏原が修士論文の中できちんと再構成してあるので、興味のある方はみてほしい。たとえば、$\mathcal{D}_X$ の stalk の global dimension が空間の次元にひとしいことが証明されていたと思う。本当の問題はまだこれからであるが、柏原，河合らとともに進めているところである。

我々の問題意識は，線型微分方程式のところに主力が注がれている。non-linear についてはそこから問題意識は出発しているのだが、手をつけるのは，未だ何年か先のことになろう。ともれ，operator theory の現代化は未だ殆んど手がつけられていないが、大切なことであって，大ぜいの人がやらねばならぬと思うので、ここで，ラッパをふいているのである。

線型微分方程式では，

13

Hadamard,
Leray,
Hörmander,
Spencer, Quillen

らが general theory を展開している。先の Cartan-Kähler よりは進んでいるが、我々の立場からみれば、まだまだ不満足である。これらについては我々が力を注いだ結果、非常に美しい体系ができつつある。これについては、あすから話すが、何分進行中のことであって、広漠として肥沃な緑野の開けている分野であるから、意欲のある人の進出を切に望んでいる。

5月25日

われわれの立場を復習しておこう。我々は次のようないいかえを行った。

代数幾何学

方程式　　= commutative ring = 多様体 (scheme)

その solution = given ring への homomorphism

= 与えられた ring に座標をもつ多様体の点。

これに倣って

解析学

線型偏微分方程式 = coherent left $\mathcal{D}$-module $\mathcal{M}$

その solution = $\mathcal{M}$ から given $\mathcal{D}$-module $\mathcal{O}$ (or $\mathcal{B}$ or $\mathcal{C}$) への $\mathcal{D}$-homomorphism.

こうして，微分方程論も一種の $\mathcal{D}$ という non-commutative ring 上の structure ないしその morphism を考えることになる。この幾何学的な structure すなわち後に少しふれる接触多様体というものがあるいみでそれにあたるが，実はこれにとどまらず多様体とはいえないような structure もでてくる。可換な ring をあつかうときの scheme にあたるもの

として何がでてくるかは分らない。雲をつかむような話だ。

しかし、代数幾何内部に於ても，可換なものだけを扱っているのでは不十分で、解析的構造まで考える必要がでてくる。例をあげよう。

例 1) Weil の定義した higher Jacobian variety は、abelian variety になるが、定義体がもとの多様体の定義体上超越拡大になってしまうことがある。するとその moduli の値はある超越関数の特殊値等になる筈だが、それはもう代数幾何では扱えない。最近 Griffiths が別のやり方でより自然な Jacobian を定義したが，しかしこっちはその complex torus が一般には abelian variety にはならない。

例 2) elliptic modular form に対する Dirichlet series をしらべるとき modular 函数体を詳しく調べる。これに対し包括的な Selberg の方法の他に、Eichler が代数的な理論，すなわち abel 積分の拡張をつくった。これを志村が幾何的に解釈しなおして保型函数体に，いわゆる志村 variety と呼ばれる abel 多様体を対応づけた。この定義体もやはり超越的になってしまう。

例 3) ζ-函数論は Weil 等による代数幾何学的方法でめざましい発展をとげたがその限界もはっきりしてきたように思う。いわゆる A_0 型とよばれるもの以外では超越的な指標

が出てきて，どうしてもうまくゆかないところがでてくる。

このように代数的なものだけでは不十分になったとき，その場に臨んで解析を用いるという考えもあるが，そうではなくやはり解析をこめた universe をつくることがのぞまれる。これは丁度 non-abel な類体論まで進んだとき非可換な代数群を考える必要がでてきたようなものである．

さて，こうして微分方程式が入ってくれば必然的に実数，複素数といったものが出てくる。ただし何度もいうように，これらは，Cantor や Dedekind の様にではなく，もっと構造的，代数的にみる．ただ今このことについて話す準備はできていない。ともあれ，我々は

数 ---- 実数又は複素数（Cantor 的でなく）

函数 ---- 解析函数 $= \begin{cases} \text{holomorphic function} \\ \text{real analytic function} \end{cases}$

実函数 = hyperfunction

この最後について説明しなければならない。我々が実函数というとき，それはふつうの解析関数の他に δ- 函数その他の重要なものが沢山あって，これらをすべてふくむような代数的な構造がすなわち hyperfunction なのである．

以下 hyperfunction について説明しよう。

M : n 次元 oriented real analytic manifold

$X \supset M$: M の complexification (complex neighbourhood)

このような X は必ず存在する。これは unique ではないが、あるいみで unique といってよい。

$$\begin{tikzcd} & & X_1 \\ M \arrow[urr, hook, bend left] \arrow[r, hook] \arrow[drr, hook, bend right] & X_3 \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & \\ & & X_2 \end{tikzcd}$$

すなわち X_1, X_2 という2つの M の complex neighbourhood をとると、X_3 という M の complex nbd であって、X_1, X_2 の open submanifold となっているようなものが存在する。

すると M 上の hyperfunction は次のように定義される。

定義: $\mathcal{O}_X$ (X 上の holomorphic function の germ のつくる sheaf。以下同じ) の (X, $X-M$) に関する n 次相対 cohomology class を M 上の hyperfunction と呼ぶ。その全体を $\mathcal{B}(M)$ であらわす。すなわち

$$\mathcal{B}(M) = H^n(X \bmod X-M, \mathcal{O}_X).$$

相対 cohomology は次のように定義される。real analytic manifold M は Stein 的であることに注意しよう。すなわち M は十分次元の高い Euclid 空間の閉部分多様体とし

て実現されるから，Mのcomplexification Xは Stein 多様体としてよい。ここで

$$X - M = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \ : \quad U_{\alpha} : \text{Stein}$$

と，X－MのStein coveringをとり，空間

$$\begin{array}{l} Y = \coprod_{\alpha} U_{\alpha} \qquad (\text{disjoint sum}) \\ \downarrow \text{自然な射} \ (U_{\alpha} \subset X \text{からみちびかれたもの}) \\ X \end{array}$$

を考える。すると

$$H^p(X \ \mathrm{mod}\ X-M, \mathcal{O}_X) = H^p(\mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(Y))$$

ここで右辺は次のようなものである。すなわち

$$A \xrightarrow{\varphi} B$$

を ring homomorphism とする。このときcochain complex.

$$\begin{array}{cccccccc} A & \xrightarrow{\delta} & B & \xrightarrow{\delta} & B \underset{A}{\otimes} B & \xrightarrow{\delta} & B \underset{A}{\otimes} B \underset{A}{\otimes} B & \xrightarrow{\delta} \cdots \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & \\ x & \longmapsto & \varphi(x) & & x \otimes y & \longmapsto & x \otimes y \otimes 1 - x \otimes 1 \otimes y + 1 \otimes x \otimes y & \\ & & y & \longmapsto & y \otimes 1 - 1 \otimes y & & & \end{array}$$

は，たしかに $\delta \cdot \delta = 0$ となり，このP次 cohomology を

$$H^p(A \to B)$$

と書くのである。

こうして定義されたcohomologyがYによらずに，さらには実はXにもよらずにMのみによって定まる（excision，下参照）ことは，general nonsense である。

実は，こんなに簡単ではないけれど一般の位相空間Xとその開集合U，X上の sheaf $\mathcal{F}$ に対して相対 cohomology が定義されて次のような性質がある。

1) long exact sequence

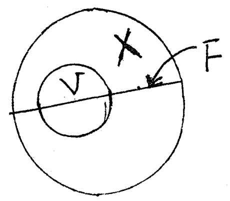
$$\cdots\longrightarrow H^p(X \bmod U,\ \mathcal{F}) \to H^n(X,\mathcal{F}) \to H^n(U,\mathcal{F})$$
$$\longrightarrow H^{p+1}(X \bmod U,\ \mathcal{F}) \to \cdots$$

がなりたつ。

2) $F=X-U$ とすれば、$H^n(X \bmod U,\ \mathcal{F})$ は F のみによって定まる。（excision theorem）

さらに、相対 cohomology を局所化することができる。即ち $\mathcal{F}$ を X 上の sheaf，F を X の閉集合とするとき，X の任意の開集合 V に対して

$$V \mapsto H^p(V \bmod V-F,\ \mathcal{F})$$



はあきらかに presheaf になるが、これからみちびかれた sheaf を $\mathcal{D}ist^p(F,\mathcal{F})$ であらわす。この sheaf は F 内に support をもっていることを注意しておく。

ここで、なぜ n 次元の相対 cohomology だけをとったか説明しなければならない。そのために次の概念を導入しよう。

定義：$\mathcal{F}$をX上の *sheaf*, FをXの閉集合とする。
Fが$\mathcal{F}$に関してXの *purely n-codimensional set* であるとは、

$$\mathcal{D}ist^{p}(F, \mathcal{F}) = 0, \quad {}^{\forall}p \neq n$$

がなりたつことである。

例 1) $\mathcal{F}$が *flabby* $\Leftrightarrow$ 任意の閉集合Fに対して *purely 0-codimensional*.

例 2) Fが$\mathcal{F}$に関し *purely n-codimensional* とし、$\mathcal{G} = \mathcal{D}ist^{n}(F, \mathcal{F})$とする。Fの任意の閉集合$F_1$に対して

$$H^{p}(X \bmod X-F_1, \mathcal{F}) = H^{p-n}(F \bmod F-F_1, \mathcal{G})$$
$$(= H^{p-n}(X \bmod X-F_1, \mathcal{G}))$$

$$\mathcal{D}ist^{p}(F_1, \mathcal{F}) = \mathcal{D}ist^{p-n}(F_1, \mathcal{G})$$

とくに、F_1について

$$\mathcal{F}\text{が}\ (n+m)\text{-}codim \Leftrightarrow \mathcal{G}\text{が}\ m\text{-}codim.$$

さて超函数論に於る最初の基本的な結果は、

基本定理：Mをn次元 *oriented real analytic manifold*, Xをその *complex neighbourhood* とする。ことき、MはXの中で$\mathcal{O}_X$に関し *purely n-codimensional* である。

この残った消えない部分を我々は

$$\mathcal{B} = \mathcal{D}ist^{n}(M, \mathcal{O}_X)$$

とかいて，このglobal sectionをhyperfunctionと呼ぶのである。

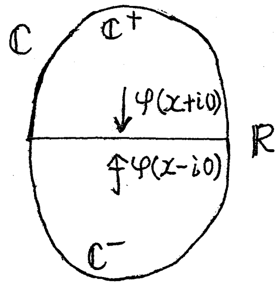
話はlocalであるから，$\mathbb{R}^n$が$\mathbb{C}^n$内で$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$に対しpurely n-codimensionalであることを示せばよい。だが一つ注意しておくが$\mathbb{C}^n$はreal $2n$次元であり，ちょうど余次元がnになったので，purely n-codim.になったと思うかもしれないがそれは正しくない。幾何的なcodimensionは，我々の言葉でいえばconstant sheafに対する余次元であって，$\mathcal{O}_X$についてみれば複素構造がからんで少しずれてくる。実際$0 \in \mathbb{R}$をとり

$$\{0\}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}^{l+m+n}$$

の$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{l+m+n}}$に対する余次元は$l+m$になって幾何的な余次元$2l+m$に一致しない。

次に，なぜこれが函数概念の拡張であるか説明しよう。

$n=1$.



$\mathbb{C}-\mathbb{R}$がすでにSteinであるから

$H^i(\mathbb{C} \bmod \mathbb{C}-\mathbb{R}, \mathcal{O})$

$$= H^i(\mathcal{O}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbb{C}-\mathbb{R}))$$

$$= \begin{cases} 0 & (i=0) \quad (\text{一致の定理}) \\ \mathcal{O}(\mathbb{C}-\mathbb{R})/\mathcal{O}(\mathbb{C}) & (i=1) \end{cases}$$

従ってこの元は上半平面からの正則函数 $\varphi(x+i0)$ と下半平面からの正則函数 $\varphi(x-i0)$ との境界値 $\varphi(x+i0)-\varphi(x-i0)$ と考えられる。

高い次元についてもこの考えをそのまま拡張すればよい。

$n=2$

$$\mathbb{C}^2-\mathbb{R}^2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 \text{ or } z_2 \notin \mathbb{R}\}$$

$$= U_1 \cup U_2$$

$$U_1 = (\mathbb{C}-\mathbb{R}) \times \mathbb{C}$$

$$U_2 = \mathbb{C} \times (\mathbb{C}-\mathbb{R})$$

$$H^i(\mathbb{C}^2 \bmod \mathbb{C}^2-\mathbb{R}^2, \mathcal{O}_X)$$

$$= H^i(\mathcal{O}(\mathbb{C}^2_z) \longrightarrow \oplus \mathcal{O}(U_i))$$

$$= H^i(\mathcal{O}(\mathbb{C}^2_z) \longrightarrow \oplus_i \mathcal{O}(U_i) \longrightarrow \bigoplus_{ij} \mathcal{O}(U_i \cap U_j))$$

しかし、*homology* 代数でよく用いられる *technic* で、(i, j) のうごくはんいとしては $i<j$ なるもののみをとって

よい（いわゆる oriented cochain をとる方法）から

$$= H^i\big(\mathcal{O}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{O}(U_1) \oplus \mathcal{O}(U_2) \longrightarrow \mathcal{O}(U_1 \cap U_2)\big)$$

$$\begin{array}{ccccc} f & \longmapsto & (f\,,\,f) & & \\ & & (f\,,\,g) & \longmapsto & (f-g) \end{array}$$

すると $H^0 = 0$ （一致の定理）

$H^1 = 0$

なぜなら $(f\,,g)$ が cocycle であるとは $(\mathbb{C}-\mathbb{R})\times(\mathbb{C}-\mathbb{R})$ 上で $f=g$ ということであるから，これは $\mathbb{C}^2-\mathbb{R}^2$ で正則な函数である。従って良く知られているように，codim. 2 の空間をのぞいて正則ゆえ，これは除去可能な特異点であって $\mathbb{C}^2$ 全体に正則な函数に拡張される。つまり coboundary である。この事実は Cauchy の積分公式を用いるだけでよい。高次元の時も証明は同様であってただ，その用い方が少々面倒になるが，ともかく代数的操作によって証明できる。

$$\mathcal{H}^2 = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

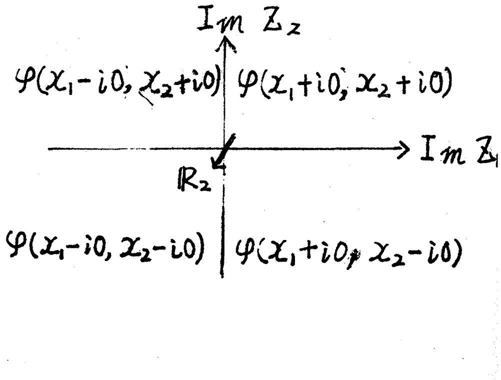
これがどうやって函数概念の拡張であるかをみよう。

$$\mathcal{O}\big((\mathbb{C}-\mathbb{R})\times(\mathbb{C}-\mathbb{R})\big) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow 0 \quad (\mathit{exact})$$

だから $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ の代表元として $\varphi \in \mathcal{O}((\mathbb{C}-\mathbb{R})\times(\mathbb{C}-\mathbb{R}))$ がとれる。今例えば

$$\varphi(z_1, z_2) = \varphi(z_1)\,\varphi(z_2)$$

$$\varphi_i \in \mathcal{O}(\mathbb{C}-\mathbb{R})$$



とすれば

$$\varphi(z_1, z_2) = (\varphi_1(x_1+i0) - \varphi_1(x_1-i0))(\varphi_2(x_2+i0) - \varphi_2(x_2-i0))$$

$$= \varphi_1(x_1+i0)\varphi_2(x_2+i0) - \varphi_1(x_1-i0)\varphi_2(x_2+i0) + \varphi_1(x_1-i0)\varphi_2(x_2-i0) - \varphi_1(x_1+i0)\varphi_2(x_2-i0)$$

これと全く同じことで一般の φ に対し

$$\varphi(z_1, z_2) = \varphi(x_1+i0, x_2+i0) - \varphi(x_1-i0, x_2+i0) + \varphi(x_1-i0, x_2-i0) - \varphi(x_1+i0, x_2-i0)$$

と，4つの象限からの boundary value としてみてやることができる．

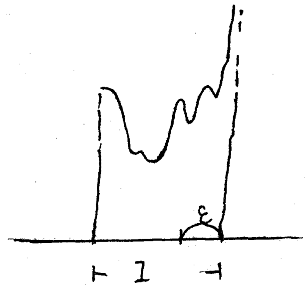
より高次元についても全く同様である．またこれがSchwarzの distribution を含むなどの重要な事実があるが、詳しくは小松の seminar note などを参照してほしい．

この hyperfunction は函数としてなりたつべき代数的条件のみを考えて最も一般化したものである．この結果として生じた最も著しい性質としては

定理：$\mathcal{B} = \mathcal{D}ist^n(M, \mathcal{O}_X)$ は M 上の flabby sheaf である．

つまり、かってな open set 上に与えた hyperfunction を global に拡張することができる。これは他の拡張された関数空間では全くなりたたぬことである。

例えば閉区間 I 上に C^∞-function を与えた時，これが distribution として境界をこえて接続できるためには、境界への距離を ε として $1/\varepsilon^N$ の order で増大度がおさえられねばならない。他の



ultradistribution と呼ばれるものでも、増大度に制限が加えられており，無論これらの増大度より早くふえる函数はいくらでもあるから増大度に制限がある限り flabby という性質は全くなりたたないのである。つまりこの性質は estimate 的な考えを全くすてて，代数的とりあつかいをしたことによってえられたわけで hyperfunction 特有の性質といってよい。

この flabbiness の effectivity は偏微分方程式論に於ていろいろなところに出されている。例えば

I) 小松の Alexander-Pontriagin 型の双対定理

II) Harvey 定数係数の偏微分方程式に対する任意の domain 上での存在定理

III) 金子の除去可能特異点に関する定理.

IV) 河合の最近の最も著しい結果．問題はかってな differential operator $P(x, D)$ を与えたとき domain Ω にどんな convexity の条件があれば

$$P(x, D):\ \mathcal{A}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{A}(\Omega)$$

が surjective になるか，つまりかってに $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ を与えて $Pu = f$ が解をもつかというものである。これについては $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}'$ 等ではしられていたが，$\mathcal{A}$ 上では函数解析的方法が用いられぬため，殆んどしられていなかった。今回，河合の与えた Ω の boundary に対する条件は characteristic に関係してきわめて natural なものである。この証明に際しては一寸奇妙に思われるかもしれないが $\mathcal{B}$ 及び $\mathcal{C}$（後述）の flabbiness が非常に有効に用いられる。

（ついで blowing-up について解説があったが，28日にくりかえされているので省略）

5月27日

我々の目標は analysis を、その代数的構造に注目して展開しようというのである。つまり、いわゆる解析的手法，評価であるとか、線型位相空間論であるとかをなるべく用いずに、いろいろな解析的結果を幾何的、代数的に導いて、そのなりたつ根拠を、いわば解剖学的に明らかにしようというのである。

M : oriented real analytic manifold

を固定する。この上の函数としては

$\mathcal{A}$: real analytic function (a sheaf)

$\mathcal{B}$: hyperfunction (a sheaf)

を考える。$\mathcal{B}$ は函数というものを全く代数的に考えて最も一般化したものであるから、これには自然な位相というものは考えられない。$\mathcal{A}$ の方にはまがりなりにも locally convex topology の位相は入るが、これは非常に複雑で関数解析的手法が用いにくい。これらの事情は我々が上のような立場をとった以上当然のことである。しかし、このように関数解析的立場を放棄して、関数概念を一般化したからこそ、$\mathcal{B}$ の flabbiness がえられたのであった。ここに代数的構造を考える、一つの必然性があらわれている。

さて、我々の立場からさらに精密な微分方程式論を展開するには、$\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$では未だ不十分である。そこで二年程前に展開された Sheaf $\mathcal{C}$ という多様体の幾何学的構造を反映した Sheaf が必要になる。

まず、cotangential sphere bundle というものについて説明しておく。

M : real analytic manifold of dim n,

X : complex analytic manifold of (complex) dim n,

とする。Mの各点 (resp. Xの各点) xでの tangent space T_xM (resp. T_xX) は real (resp. complex) n次元の vector space になっている。これは xの無限小近傍を拡大したものにあたっている。これに対しその dual vector space T_x^*M (resp. T_x^*X) が考えられる。Mが riemannian manifold であるか、(skew-symmetric な内積をもつ) symplectic manifold であるときは、その non-degenerate な内積を通じて同型であるが、普通は別個のものと考える。ここで xをうごかすと、

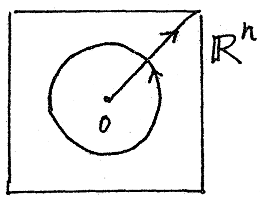
$$TM = \bigcup_x T_xM \quad (\text{resp. } TX = \bigcup_x T_xX)$$

$$T^*M = \bigcup_x T_x^*M \quad (\text{resp. } T^*X = \bigcup_x T_x^*X)$$

は自然に n 次元の vector bundle になり各々 tangent bundle, cotangent bundle と呼ばれる。M に singularity がある場合は、TM の方には自然に多様体 (variety) の構造が入るが、T^*M の方は topology を定義できるものの、多様体にもならず、少し複雑な structure になる。

今、$\mathbb{R}^n$ 内の原点から出る vector で、正の scalar 倍になっているものを同一視した集合を

$$\mathbb{R}^n - \{0\} / \mathbb{R}^+$$



とかけば、これは原点をとおる、半直線全体の集合と一致し、半直線と、原点中心の $\mathbb{R}^n$ 内の球 S^{n-1} との交わりを同一視することによって、

$$\mathbb{R}^n - \{0\} / \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\sim} S^{n-1}$$

となる。同様に、

$$\left(\begin{array}{c} \mathbb{R}^n - \{0\} / \mathbb{R} - \{0\} \simeq S^{n-1} / \{\pm 1\} \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1} \\ (\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1} : (n-1) \text{次元実射影空間}) \end{array} \right)$$

$$\mathbb{C}^n - \{0\} / \mathbb{C} - \{0\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1}$$

$$(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1} : (n-1) \text{次元複素射影空間})$$

従って、一般にk次元の real vector bundle（resp. complex vector bundle）が与えられたとき、各 fibre で上の操作を行うことにより、$(k-1)$次元の sphere bundle（resp. projective bundle）が定義される。tangent bundle, cotangent bundle について この操作を行えば、$(n-1)$次元の spherebundle

$$SM = TM - M / \mathbb{R}^+$$

$$S^*M = T^*M - M / \mathbb{R}^+$$

（"$-M$"とは TM から zero section（$\cong M$）を のぞいたという意味である）

がえられ、各々 tangential sphere bundle, cotangential sphere bundle と呼ばれる。同様に complex manifold X 上には tangential projective bundle PX, cotangential projective bundle P^*X が定義される。これらはいずれも M, X を与えることによって、自然に、一意的にきまる。

SM, S^*M から M への projection map を各々 τ, π であらわす。

解析に於て essential な役割を果すのは、S^*M や P^*X である。どちらも 奇数次元の多様体であるが、単に abstract な多様体というばかりでなく、一種の内部構造、いわゆる symplectic structure あるいは contact structure を持って

いる。その重要性については後にふれる。

まず最も基本的なことは、このS*M の上に、次に述べるような重要な性質をもつ sheaf "$\mathcal{C}$" が定義される点である。

定理を述べる前にちょっと用語の準備をする。一般に位相空間の連続写像 $f: Y \to X$ と Y 上の sheaf $\mathcal{G}$ が与えられたとき、$\mathcal{G}$ の f による direct image という X 上の sheaf $f_*\mathcal{G}$ を構成できる。すなわち、X の open set U に対し、$\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{G})$ を対応させるのは、明らかに presheaf であるが、容易に分るようにこれは実は sheaf であり、これを $f_*\mathcal{G}$ でかく。すなわち

$$\begin{array}{ccc} Y & & \mathcal{G} \\ \downarrow & & \downarrow \\ U \subset X & & f_*\mathcal{G} \end{array}$$

$$\Gamma(U, f_*\mathcal{G}) = \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{G})$$

さらに一般に open set U に対し

$$U \longmapsto H^p(f^{-1}(U), \mathcal{G})$$

なる対応は、presheaf で、これはもはや一般に sheaf ではないが、この presheaf からみちびかれる sheaf を $\mathcal{H}^p_f(\mathcal{G})$ とかき p-th direct image とよぶ。この $p=0$ の場合が

$f * g$ である。f_* は flabby sheaf を flabby sheaf にうつす left exact functor であるが、実は $\mathcal{H}^p_f(\cdot)$ は f_* の p-th derived functor になっている。

さてここで最も大切な基本定理は、

基本定理：canonical に

$$\mathcal{B}/\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \pi_* \mathcal{C}$$

つまり

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{B} \xrightarrow{\beta} \pi_* \mathcal{C} \longrightarrow 0 \qquad (\text{exact})$$

実は

$$(2) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{A}(M) \longrightarrow \mathcal{B}(M) \longrightarrow \mathcal{C}(S^*M) \longrightarrow 0 \qquad (\text{exact})$$

ここで α は、自然に analytic function を hyperfunction の特別なものとみる写像である。重要なのは β という写像で、これは hyperfunction を、ちょうど光をプリズムにあてて 7 色に分析する様に、S^*M 上にその構造を分析するものである。このβによって hyperfunction の構造を詳しく spectre 的

に、分解して調べることができる。そして上の定理の述べるところは、この分析法によって分らないところが丁度解析函数だということである。

この exact sequence によってこれら3つの sheaf は互いにむすばれているので、互いに助けあって、そのメカニズムを調べることができる。ふつうには、$\mathcal{B}$について調べるのにまず、$\mathcal{C}$について考察して、あと$\mathcal{A}$について補助的な考察をすることによる、という筋書だが、無論この場合にかぎらず例えば、$\mathcal{B}, \mathcal{C}$ の flabbiness を用いて$\mathcal{A}$の性質を調べるということもできる。大体、数学の式というのは一般にそうなので、例えば Riemann-Roch の式などをみても分るが、一方を知ることによって他方を知り、又それによって、もとの方の性質をさらに詳しく知ることができる、という仕組になっている。

(2)式で onto が成り立つのは、実多様体がいつでも Stein 的だから、$H^i(M, \mathcal{A}) = 0$ $(i>0)$ であることによる。$\mathcal{B}, \mathcal{C}$ も flabby だから、この higher cohomology もすべてきえてしまうので、結局(1)式と(2)式は同じことを言っているにすぎない。ただ local に書いたか global に書いたかという違いだけである。

この$\mathcal{C}$について，ごく大まかなことを実例に則して話そう。

今，M上の超函数$f\in\Gamma(M,\mathcal{B})$が与えられると，$\beta f\in\Gamma(M,\pi_*\mathcal{C})=\Gamma(S^*M,\mathcal{C})$が定まる。一般に，sheafのglobal section φが与えられたとき，その上に制限すると$\varphi=0$となるような最大のopen setが存在し，その補集合をφのsupportとよび$\mathrm{supp}\,\varphi$とかく。このsupportの概念のあることが函数の基本的な性質である。例えば，analytic functionalといったものでは，このsupportという概念は明確でない。函数を，Hilbert空間なり何なりのelementとして考えたときには，これは単なる抽象的なvector spaceのelementというにすぎない。しかし，函数というものは，ある空間の上の函数なのであって，しかもlocalに規定されている，ということによって，この多様体の構造に結びついているのである。こうして函数を，局所性をもつものとして，とらえたとき，その自然な拡張がsheafなのであって，そのglobal sectionというのは単なるvectorspaceのelementではなく，多様体の各点の上で定まった局所的なものが全体につながったものとしてとらえられるのであって，そこでは，supportという概念が明確ないみをもっている。

さて，話をもとにもどして，βfは$\Gamma(M,\pi_*\mathcal{C})$のelementとも$\Gamma(S^*M,\mathcal{C})$のelementとも解釈される。そこで

$$S.S_M f = \mathrm{Supp}\,\beta f \quad \text{as} \in \Gamma(M, \pi_* \mathcal{C}),$$
$$S.S_{\mathcal{C}} f = \mathrm{Supp}\,\beta f \quad \text{as} \in \Gamma(S^*M, \mathcal{C})$$

オ一の $SS_M f$ は、(1)式からわかるように、普通の意味での *singular support* である。しかし、大切なのは、オ二の $SS_{\mathcal{C}} f$ であって、これは βf のより詳しい *singular support* ということができる。両者の関係は

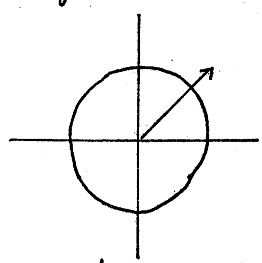
$$\pi(SS_{\mathcal{C}} f) = SS_M f$$

となっているが、$SS_{\mathcal{C}} f$ は一般に $\pi^{-1}(SS_M f)$ よりずっと小さくなっており、それが、解析に於ては重要なのである。

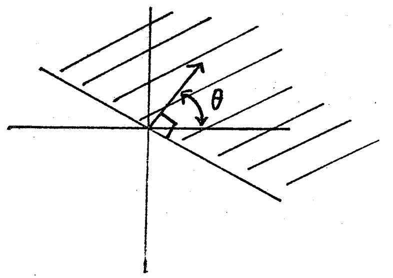
以下実例についてみる。簡単のため、

$$M = \mathbb{R}^2,$$
$$S^*M = \mathbb{R}^2 \times S^1$$

とする。注意すべきは、この S^1 は *cotangent sphere* である点である。一般の次元でいえば S^n を *tangential sphere* とみるときは、これは原点をとおる半直線の集合である。しかし、*cotangential sphere* は *dual vector*

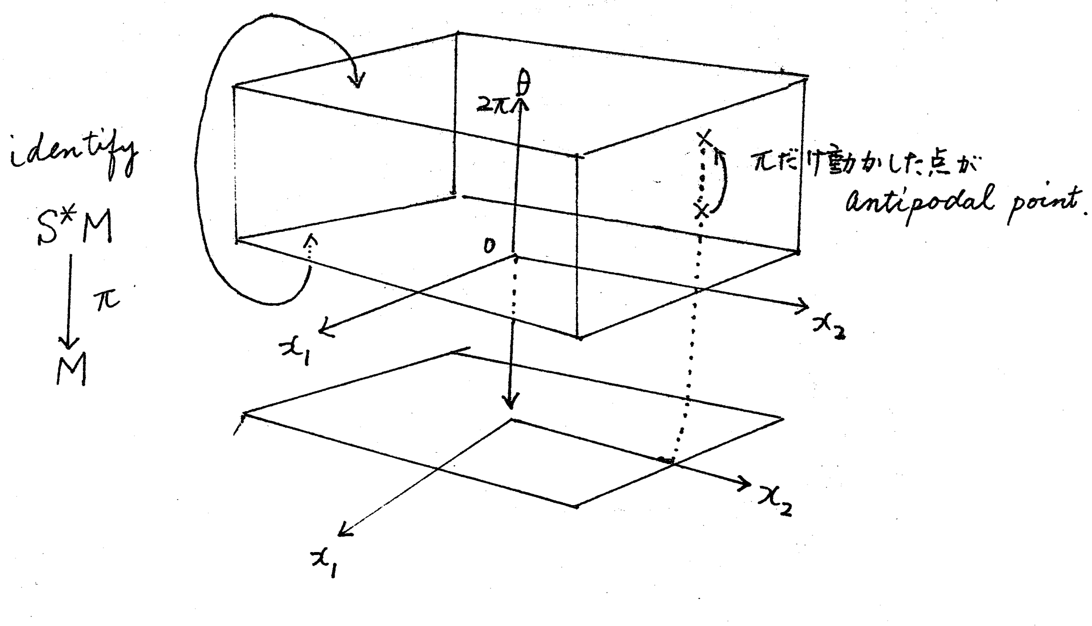


spaceからつくったsphereであり、これはつまり、超平面の集合にうらおもてを考えたものである。あるいは、このうらおもてのある超平面のおもてに接する空間を考えて、$\mathbb{R}^{n+1}$次の原点を境界にふくむ「半空間」の集合と考えてもよい。そしてこの半空間とnormalな方向に長さ1の、原点始点のvectorをたてて、S^n とidentifyしたのであった。とくに S^1 ならば、x軸との角度θによって、この半空間をあらわすことができる。つまり、

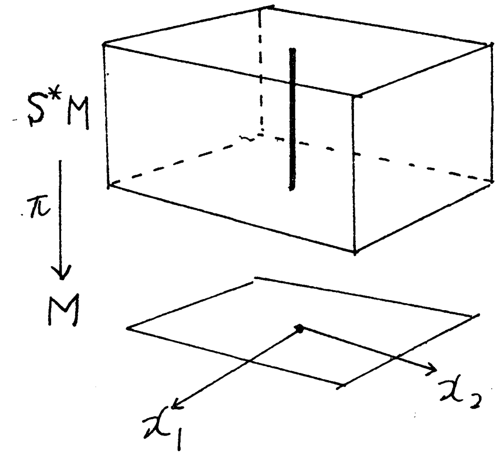


$$S^1 \cong \{\theta : 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

よって S^*M は

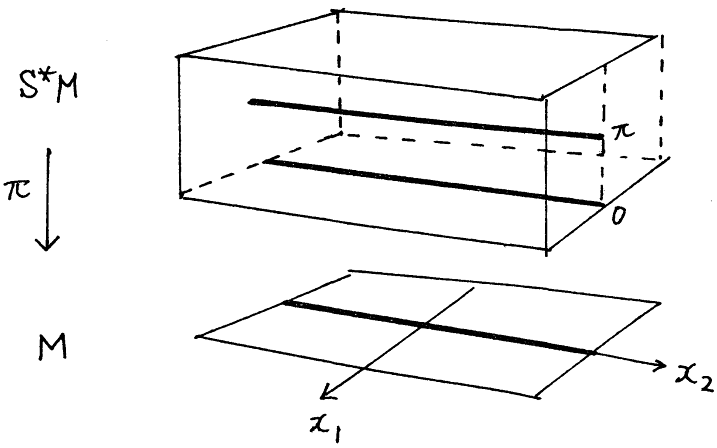


例 1)　$\delta(x) = \delta(x_1)\,\delta(x_2)$



この場合はS^*Mにあげても結果がよくならない。

例 2)　$f(x_2)\,\delta(x_1)$　　$f(x_2)$ analytic



このS^*Mに於る *singular support* の形状は、次のように、δ函数の *boundary value* としての分解によって知られる。つまり、

(3) $f(x_2)\delta(x_1) = \dfrac{-1}{2\pi i} f(x_2)\left(\dfrac{1}{x_1+i0} - \dfrac{1}{x_1-i0}\right)$

となっている。この第一の部分

$$f(x_2)\frac{1}{x_1+i0}$$

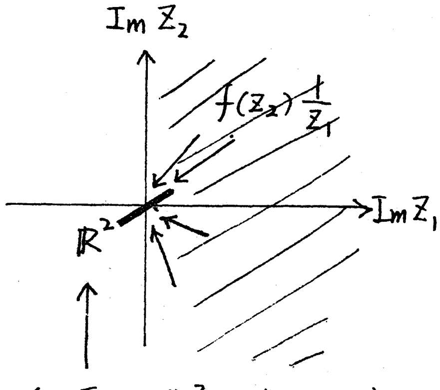
を考えよう。先程より cotangent といっているが、実はこれは Fourier 変換などと結びついていて、Fourier 変換はよく知られている様に、$e^{i\langle x,y\rangle}$と、もとの空間と dual な空間を i をつけて変換する。従って、もとが real な空間ならば、pure imaginary な空間へ変換するから、S^*M は実は $\sqrt{-1}S^*M$ と書くのが妥当なのである。今の場合、この点がどう解釈されるかというと、

$$f(x_2)\frac{1}{x_1+i0}$$

とは、$z_1=0$ に singularity をもつ函数

(4) $$f(z_2)\frac{1}{z_1}$$

の、$\mathrm{Im}\, z_1>0$ なる半空間からの boundary value として定義されるのである。そして函数 (4) は、この半空間を出ては接続できない。



(以下、この $\mathbb{R}^2$ は略してかく)

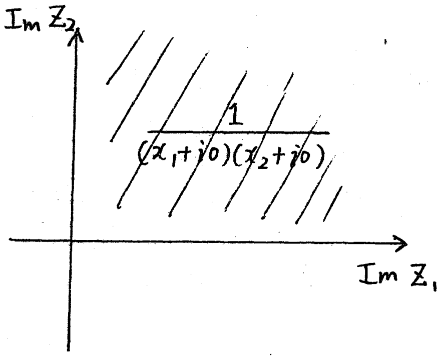
この半空間は S^*M において、$\theta=0$ なるものにあたり．従ってはじめの図にあるように $\theta=0$ のところに singularity があらわれるのである。同様に (3) の右辺の第二項は (4)式の $\mathrm{Im}\, z_1<0$ なる半空間からの boundary value であって，その singularity の contribution が $\theta=\pi$ のところにあらわれている。

一般の超函数ではこうはいかない。たとえば例にもどって δ 函数を考えよう。これは boundary value としてあらわすには．最低 3 コは必要だが．標準的には

$$(5)\qquad \delta(x_1)\delta(x_2)=\left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^2\left(\frac{1}{(x_1+i0)(x_2+i0)}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(x_1-i0)(x_2+i0)}+\frac{1}{(x_1-i0)(x_2-i0)}-\frac{1}{(x_1+i0)(x_2-i0)}\right)$$

とあらわされる。しかし．この表示はうまくない。なぜなら．(5)の右辺の各項は．各象限．つまり 1/4 の空間でしか． horomorphic でない。これは半空間でないから cotangential な方向というのがはっきりしない。



我々は半空間で．holomorphic な函数による boundary

value としての表示がほしいので、そうなると無限個必要になるのである。これがもし有限個の和としてかければ、例2)のように有限個の方向にしか *singularity* は出てこない。実際、δ 函数に於ては

$$\delta(x) = \frac{1}{(-2\pi i)^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta + i0)^2},$$

一般に n 変数の δ 函数では

$$\delta(x) = \frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n} \int \frac{\sum_\nu (-1)^{\nu-1} \xi_\nu \, d\xi_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\xi_\nu} \wedge \cdots \wedge d\xi_n}{(\langle x, \xi \rangle + i0)^n}$$

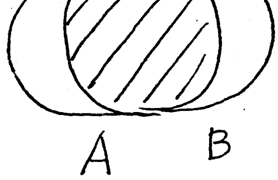
(*integral* の分子は S^{n-1} の面積要素である)

とあらわせる。つまり、$\delta(x_1, x_2)$ は各 θ 方向で正則な

$$\frac{1}{x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta + i0}$$

という函数の連続的なスペクトルの和に分解される。

どうして、この様に連続的なスペクトルが出てくるのかを説明しよう。これは多変数函数論で良く知られている次の *Cousin* の *lemma* に基く。



定理：2つの正則凸な領域 A, B があって、その和集合 $A \cup B$ もまた

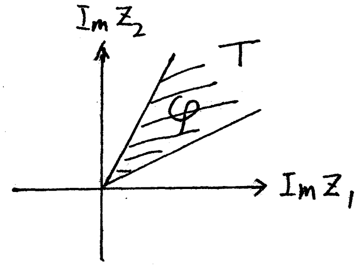
正則凸とする。このとき、$A\cap B$ で正則な函数は A で正則な函数と B で正則な函数との和に分解できる。

これを我々の考える *tube domain* T に適用しよう。すると、

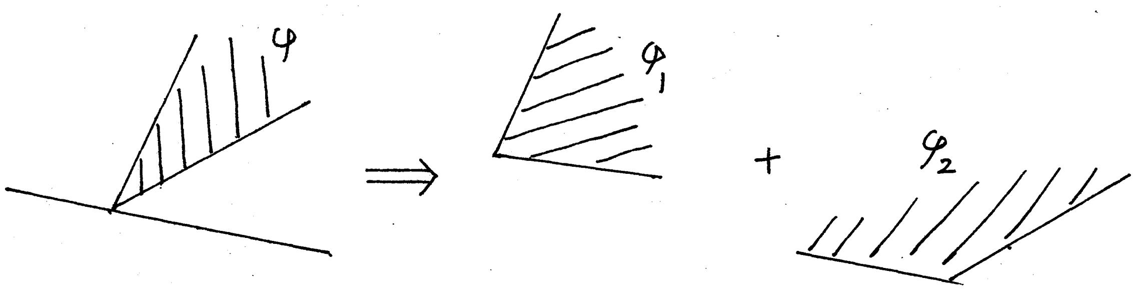
T が正則凸 $\Longleftrightarrow$ 切り口が convex

(Bochner の定理)

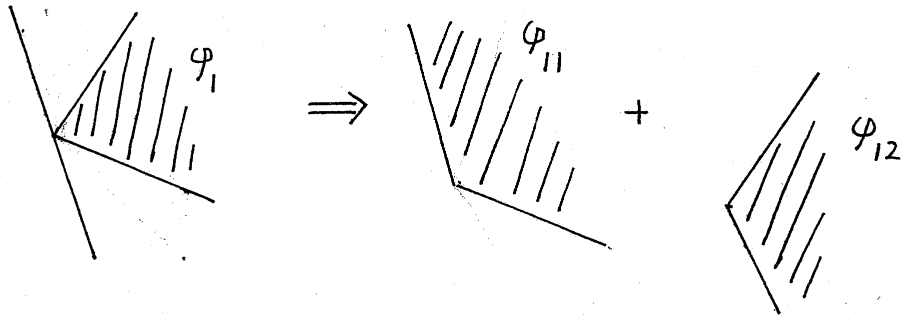
である。従って我々は T 上に与えられた正則函数 φ の定義域をひろげたいわけであるが、このときいっぱいにひろげたものは、半空間を定義域とする正則函数であることがわかる。



(それ以上ひろがる時は、convex hull までは接続できるから、実は原点の近傍全体で正則になってしまう。)そこで、半空間で正則な函数というのが基本になるのである。さて、Cousin の lemma により、φ は次のように分解される。

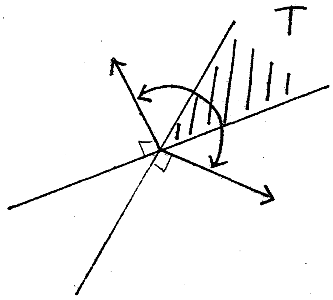


この各々の定義される角度はひろがっている。この各々がさらに，例えば φ_1 は

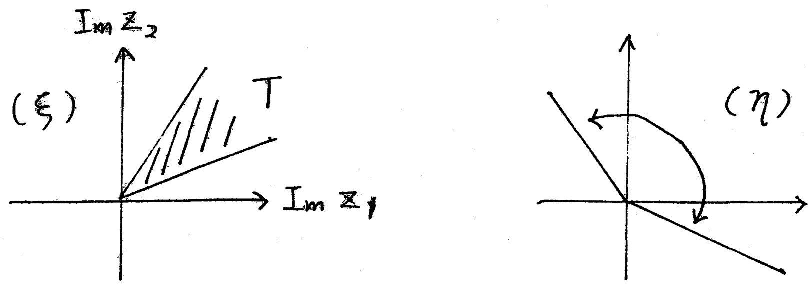


と分解される。この操作を無限にくりかえせば，半空間で正則なものに連続的に分解されることになる。

さて，注意すべきは，どこからどこまでの半空間上に分析されたかというと，上の操作からあきらかに図の矢印の範囲



になっている。つまり，$\sqrt{-1}\,TM$ 上の角領域 T 上に与えられた正則函数 φ からきまる超函数の *spectrum* は T の *dual cone* $=\{\eta;\ \langle\xi,\eta\rangle \geqq 0,\ \text{for}\ \forall\xi\in T\}$ 内にあるという基本的事実がえられた。



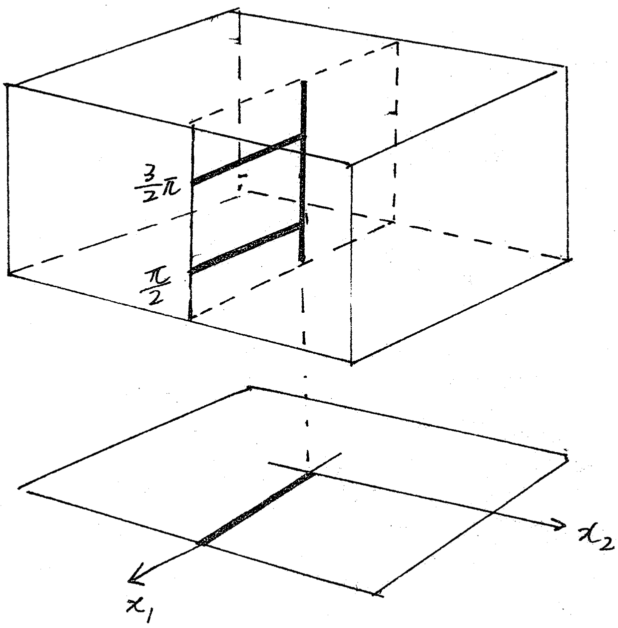
$\sqrt{-1}\,TM$ 　，　 $\sqrt{-1}\,T^{*}M$

φの定義域Tがせまいほど、超函数としては複雑になるわけであるが、このとき dual cone はより広がって、広い範囲のスペクトルに分解されることになり、直観的なイメージにもよくあっている。

なお、上の議論は実は大分乱暴であって、実際は半空間に接するような domain を考えて議論する。しかし、直観的 image というか、本質的な点では上のままでよい。ただこのやり方は、座標のとり方に depend しているから、ちゃんと formulate するのは面倒である。この点をさけて、座標によらぬ intrisic な定義をするためには、超函数の場合と同じ様に、cohomological なやり方による。これについては、のちにふれるとして、もう少し例を挙げる。

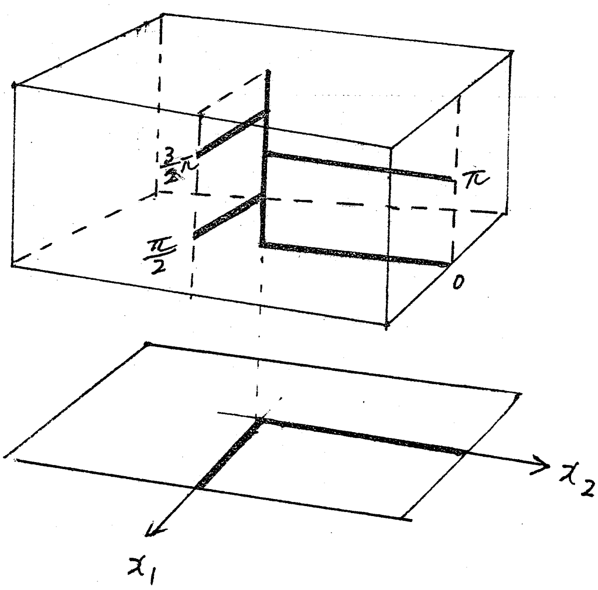
例 3)　Yをheaviside 函数として

$$Y(x_1)\delta(x_2)$$

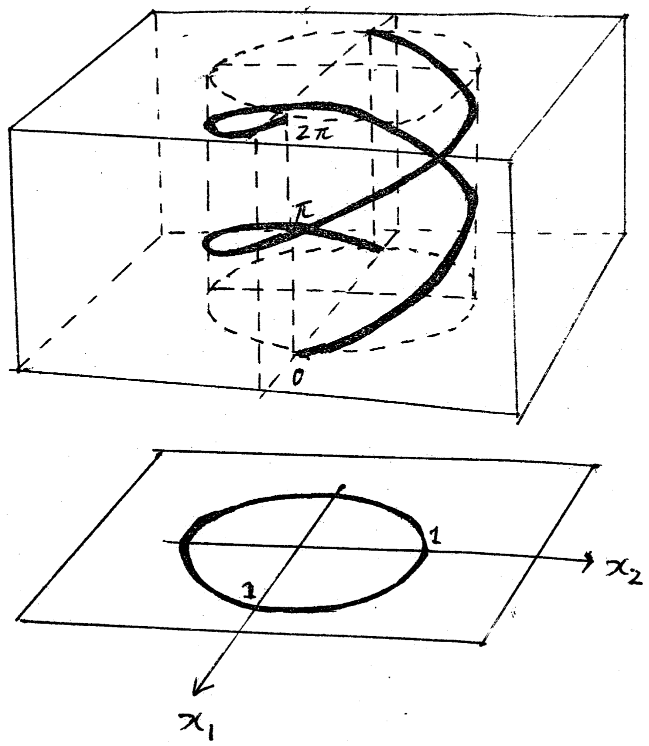


例 4)

$$Y(x_1)Y(x_2)$$

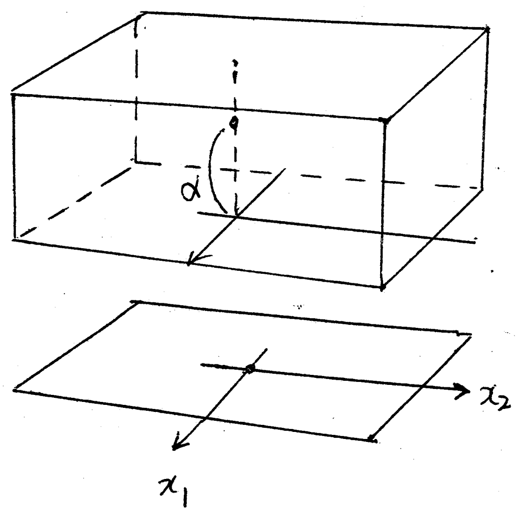


例5)
$$\delta\left(\sqrt{|x_1^2+x_2^2-1|}\right)$$



例6)　実は次のように一点をsupportにもつものが存在する。

$$\frac{1}{x_1\cos\alpha+x_2\sin\alpha+i(-x_1\sin\alpha+x_2\cos\alpha)^2}$$



この essential な example は、河合が、Hörmander の仕事等に示唆されて発見した。この例の意味するところは、上の函数が、α 方向の半空間に接するある曲がった空間一コからの boundary value としてかけてしまうということである。これを用いれば、S^*M 内のかってな閉集合を support にもつような超函数が構成される。これをさらに精密化した、最終的な結果は、柏原によって証明された。$\mathcal{C}$ が flabby sheaf であるというものである。これらはいずれも、昨年の前半にえられた。

上で、超函数と S^*M との結びつきは納得されたと思う。さらに S^*M の重要な点は、これが微分方程式と結びつく点である。

良く知られているように、M 上の微分作用素、

$$P(x,D)=P_m(x,D)+\cdots$$

の principal part (symbol) $P_m(x,D)$ の D のかわりに ξ を入れた、$P_m(x,\xi)$ は T^*M 上の m 次 homogeneous function になっている。さて T^*M 内の閉集合

$$\{(x,\xi)\ ;\ P_m(x,\xi)=0\}$$

は、ξについて scalar倍によって不変であるから、これは、S^*M内の closed set とみることができる。しかも、この集合は antipodal point をふくんでいる。だが微分方程式論では、微分作用素のみを考えるのでは不十分なのであって、いわゆる Pseudo differential operator（以下ΨDOと略記する）を考える方が自然である。ΨDOまで拡張すれば、これはもはやξについては homogeneous かつ analytic というにとどまるから、もう antipodal な点に於ける状況は全く違ってきて、S^*Mを考える理由があきらかになる。

ともれ、微分作用素にせよ、ΨDOにせよ、その symbol のS^*Mでの零点集合というものが意味をもって、微分方程式の性質を規定する大切な役割を果す。例えば、作用素が、elliptic であるとは、これが空集合であることであり、その他、hyperbolicity とか analytic hypoellipticity という概念はこの集合の形状によって定義される。

大切なことは、我々は analytic の category で考えているので、（適当な条件のもとでは）低階の項によらず、principal symbol だけで 方程式の性質が決ってしまう点である。そして、次のようにして微分方程式を estimate 的な方法からはなれて、全く幾何的に扱うことができる。

つまり、symbol のξ部分に $grad_x \varphi$を代入した

(6) $$P_m(x,\ \mathrm{grad}_x\varphi(x))=0$$

という，未知函数一コの一階非線型偏微分方程式が重要である。今，単独の場合を扱ったが，overdetermined system の場合は，(6) が system になるだけのことである。すると (6) の形の方程式は単独の場合は Lagrange-Charpit, system の場合も Jacobi の方法（接触変換の方法）によって完全に解かれるから，これによってもとの微分方程式の性質が知られるのである。いいかえれば，我々の考える微分方程式の性質は $(2n-1)$ 次元の接触多様体 S^*M の構造によって完全に決り，この構造については，接触変換の理論によって全く簡単な方程式のそれに帰着されてしまうのである。

この辺で Pseudo-differential operator（ΨDO）の話をしておこう。$\mathcal{C}$ には微分作用素よりさらに広い ΨDO の sheaf が作用している。この起源は，singular integral operator などにある。

そこで，簡単な例として，Hilbert 変換

(7) $$H(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-t}\,dt$$

を考える。この積分は $f(x)$ と $1/x$ との convolution であるが、$t=x$ で singularity をもっているので、これを適当に解釈しなければならない。普通はここでの principal part をとって考える。さて $1/x$ は $1/(x+i0)$ 又は $1/(x-i0)$ と考えられる。この差はいわゆる δ-函数 $\delta(x)$ であるが、この相加平均は、real part をとる感じで、$1/x$ の principal part とよばれ、$P(1/x)$ とあらわされる。よって

$$\frac{1}{x+i0} = P\left(\frac{1}{x}\right) - \pi i \cdot \delta(x)$$

そして、(7) は

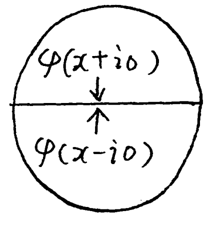
$(7)^{bis}$ $$H(f) = f(x) * P\left(\frac{1}{x}\right)$$

と解釈される。一方

$$f(x) * \delta(x) = f(x)$$

であり、$*(1/x+i0)$ は $f(x)$ をその上半平面からの boundary value へ project する写像、$*(1/x-i0)$ は同じく下半平面への projection operator である。従って、Hilbert 変換とは、$f(x)$ を boundary value の差として

$$f(x) = \varphi(x+i0) - \varphi(x-i0)$$



とあらわしたとき、下半平面からのそれの符号をかえた、

$$(7)^{\text{bis}} \qquad H(f) = \varphi(x+i0) \underset{\sim}{+} \varphi(x-i0)$$

を対応させることになる。

これは Fourier 級数でいえば、cos を sin で、sin を −cos でおきかえた、いわゆる共役 Fourier 級数を対応させることになる。実軸上の函数の場合も、こうして Hilbert 変換によってえられた函数を、もとの函数の共役函数と呼んでいる。

しかし、この共役函数を対応させる、というのは、ちゃんとした operator になっていない。なぜなら、超函数 f の、上下半空間への分解は unique ではなく、analytic function ψ をとって

$$f(x) = (\varphi(x+i0)+\psi) - (\varphi(x-i0)+\psi)$$

としてもよい。これを変換すると、もとのそれと 2ψ だけの違いが生じてしまう。これは Hilbert 変換というものを、函数解析的に global に考えないで、micro にみた結果である。しかし、幸いなことに、これは analytic function の差しか生じない。従って、Hilbert 変換は、

$$\mathcal{B}/\mathcal{a} \longrightarrow \mathcal{B}/\mathcal{a}$$

の変換としては，well-defined でしかも local operator，つまり sheaf homomorphism になっていることが分る。普通の函数解析的な考え方では，$\mathcal{D}'$ の中で $\mathcal{E}$ は dense であるから $\mathcal{D}'/\mathcal{E}$ なる空間は位相的に考えられない。そのかわり，pseudo-local operator として考えている。つまり，singular support をふやさない operator として取扱うのである。しかし，我々の立場では $\mathcal{B}/\mathcal{A}$ というものが，自然に考えられて，この上では Hilbert 変換はちゃんと local operator になっている。このことは，我々の立場では，本質的である。なぜなら我々は函数を，sheaf として扱うのであるから，その morphism はどうしても local operator でなければならないのである。一般に積分核が対角線部分に singularity をもつような積分変換，いわゆる singular integral operator

$$\int K(x,x')f(x')\,dx'$$

は $\mathcal{B}/\mathcal{A}$ の sheaf endomorphism として把握できる。さらに，これを一般化した，ΨDO も，同様である。

しかも，より本質的なことは，ΨDO は単に $\mathcal{B}/\mathcal{A}$ の sheaf endomorphism というだけでなく，実は，sheaf $\mathcal{C}$ の endomaphism を与えている。先の Hilbert 変換でいえば，上からの境界値は，上からの境界値，下からのそれは、下か

らのそれへとなっている。そこには不定さはあるが、それは analytic function の不定さにとどまる。こうして ΨDO は $\mathcal{C}$ の endomorphism になっているが、実はある意味で逆もいえる。つまりパラメーターをこめた sheaf $\mathcal{C}$ というものを考えて、パラメーターに関して functorial な sheaf $\mathcal{C}$ の endomorphism と ΨDO とを同一視することができる。さらに、代数的な取り扱いもできて、非常に広い意味で、ΨDO の sheaf というものが、代数的に定義される。

一般の微分方程式の応用には、この ΨDO は余りに広すぎるので、これよりずっと小さな class のものを考える。これは complex domain での analysis をやれば、自然に cohomological にも定義されるが、以下にのべるように直接 symbolical にも表わすことができる。これが河合，柏原によって研究のすすめられている 有限型の Pseudodifferential operator である。もう少し詳しくは, Kashiwara & Kawai; "Pseudodifferential operators in the theory of hyperfunctions" (Proc. Jap. Acad. Vol. 46 No. 10 (1970), 1130-　　　) を参照してほしい。

ここでは直観的な定義を与えよう。differential operator と pseudo-differential operator との essential な違いは、

何度もくりかえすようだが、前者がM上の作用素なのに対し、後者はS^*M上の作用素となっている点である。つまり、函数をいろいろな方向からの boundary value として表わした時前者は各々に全く同じに作用するが、後者は先に Hilbert 変換の例でみたように、今度は全く別々に作用する。ところが亜D O は、みかけ上は全く differential operator と同じように定義されるのである。

Mの上の differential operator の sheaf を $\mathcal{D}$, S^*M上の亜D O の sheaf を $\mathcal{P}$ と書こう。$x_0 \in M$における$\mathcal{D}_{x_0}$の元は

$$P\cdot(x,D)=\sum_{j=0}^{m} P_{m-j}(x,D)$$

($P_{m-j}(x,D)$ は xについて x_0 の近傍で analytic な、$(m-j)$次の微分作用素)

とかかれる。$\mathcal{P}$の方は $(x_0,\eta_0)\in S^*M$ の近傍で定義される operator を定義することによって $\mathcal{P}_{(x_0,\eta_0)}$ がきまる。今度は、この元は

$$P(x,D)=\sum_{j=0}^{\infty} P_{m-j}(x,D)$$

とかかれる。今度は negative の項がでてくるから．これは．微分作用素の逆，積分作用素をふくんでいることになる。これがどの様にして意味づけられるのだろうか？

例えば $D_1\ (=\partial/\partial x^1)$ という作用素の逆について考えよう。

$$D_1 f(x) = g(x) \qquad f, g \in \mathcal{B}$$

とする。では、この逆に

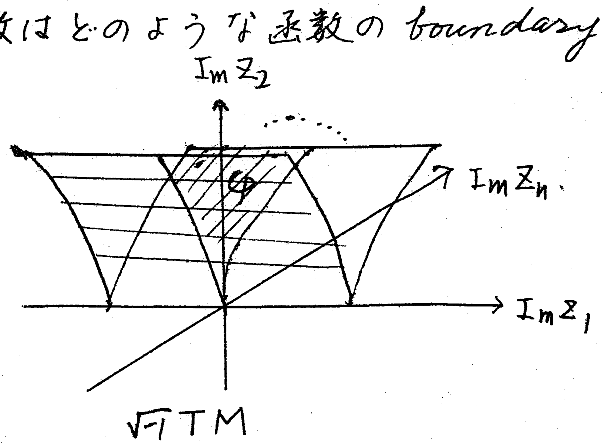
(8) $$D_1^{-1} g(x) = f(x)$$

と考えてよいのだろうか。これは．ずいぶん無茶な話である。しかし全然無茶という訳ではない。D_1^{-1} の不定項は次のようにかかれる。

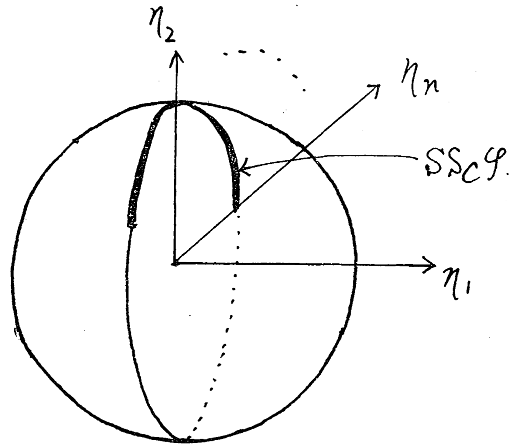
$(8)^{bis}$ $$D_1^{-1} g(x) = f(x) + \varphi(x_2, \cdots)$$

（ φ は x_1 によらない ）

そこで、この φ という函数はどのような函数の boundary value としてかかれているかを見よう。すると φ は x_1 によらないから，右図のように．$\mathrm{Im}\, z_1$ 方向にのびた tube domain



上で定義された（有限コの）holomorphic function の boundary value になっている。そこでこの定義函数を半空間で定義された函数のスペクトルに分解してやると、この分解は、$(z_2, \cdots, z_n)$ 空間で行えばよいのだから、この分解で、でてくる半空間というのはすべて $\mathrm{Im}\, z_1$ 軸をふくむ。つまり、S^*M にうつって考えれば、$\{\eta_1 = 0\}$ という赤道の上にのってしまうことになる。故に η_1 方向 $(1, 0, \cdots, 0)$ では φ は analytic であり、$\mathcal{C}$ の元としていえば、そこで zero なのである。だから、$(8)^{bis}$ に於る



S^*M

不定さは sheaf $\mathcal{C}$ にうつれば、$\eta_0 = (1, 0, \cdots, 0)$ に於ては、きえてしまって、そこでは D_1 という operator の inverse operator は well-defined になる。つまり (8) という表示はちゃんと意味がつくのである。

注意すべきは、こうして逆が意味をもつ operator は方向によって異なることである。η_0 では D_1 の逆は意味があるが、$D_2, \cdots, D_n$ はそうではない。ここに、S^*M にまでもってゆく理由がある。

そこで、ちゃんとした定義にもどろう。

定義

$$(9) \qquad P(x,D) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{m-j}(x,D)$$

が $P_{(x_0,\eta_0)}$ の元であることは $P_{m-j}(x,\eta)$ が次の条件をみたすことである。

（条件1） $P_{m-j}(x,\eta)$ は、(x_0,η_0) の近傍で定義された (x,η) に関する analytic function であって、η に関して positively homogeneous of degree $(m-j)$ (i.e. $P_{m-j}(x,t\eta) = t^{m-j} P_{m-j}(x,\eta)$ for $^\forall t>0$)

より具体的にいえば、例えば、$\eta_0=(1,0,\cdots,0)$ とすれば、これは

$$P_{m-j}(x,\eta) = \sum_{\nu_2,\cdots,\nu_n \geq 0} a^{(m-j)}_{\nu_2,\cdots\nu_n}(x)\,\eta_1^{m-j-\nu_2-\cdots-\nu_n}\eta_2^{\nu_2}\cdots\eta_n^{\nu_n}$$

（$a_\nu(x)$ は x_0 の一定の近傍で holomorphic）

と級数展開されることである。

さらに、(9) の和が operator として収束するように各項の増大度に対して次のような制限がつく。

（条件２）

$$(10)\qquad |P_{m-j}(x,\eta)| < \text{const.}\, C^j j! \qquad (C>0, \qquad).$$

無論、(9)のDにηを代入したら、この程度の増大度では級数は発散してしまう。しかし積分作用素というのは収束作用のつよいoperatorなので、みかけは発散しても、operatorとしてはちゃんと収束するのである。　　（定義終り）

$\mathcal{P}$についての主な結果をひろってのべておく。

I）$\mathcal{P}$は非可換なringのsheafをつくり、$\mathcal{C}$上のlocal operatorになっている。

II）(9)式のようなΨDO（of finite type）が(x_0,η_0)の近傍で定義されているとする。この$P(x,D)$のsymbolが(x_0,η_0)できえない。すなわち$P_m(x_0,\eta_0)\neq 0$ならば、(x_0,η_0)の近傍で、$P(x,D)$の逆作用素が存在して、やはり有限型になり、それは$(-m)$階、かつ、そのsymbolは$P_m(x,\eta)^{-1}$に一致する。

これらの結果に於て大切なのは、$\mathcal{P}$が$\mathcal{C}$上のlocal operatorになっているという点であって、逆のoperatorの存在の方は全くformalな計算によって初等的に導かれる。ところが、こ

の formal な結果が、私の前に見出した定理を、たちどころに導びいてしまう。

定理：P を $\mathcal{C}$ 上の m 階微分作用素とする。（当時は擬微分作用素の概念が未だなかった）

$$F_P = \{(x,\eta) \in S^*M \mid P_m(x,\eta) = 0\}$$

$$(\subset S^*M : \text{closed set})$$

とすると、P は $S^*M - F_P$ 上では isomorphism である。

この定理は、Fritz-John の technic を用いて、Cauchy-Kovalevskaja からみちびかれたのであったが、上の結果を見れば、たちどころに導びかれる。しかも P は pseudo-differential operator でよい。

さて、上の II をいいかえれば、$P \in \Gamma(S^*M, \mathcal{P})$ に対し、

$$0 \to \mathrm{Ker}_{\mathcal{C}} P \to \mathcal{C} \xrightarrow{P} \mathcal{C} \to \mathrm{Coker}_{\mathcal{C}} P \to 0$$

$$(\text{exact})$$

とすれば、II は

(11) $$\begin{cases} \mathrm{Supp}\, \mathrm{Ker}_{\mathcal{C}} P \subset F_P \\ \mathrm{Supp}\, \mathrm{Coker}_{\mathcal{C}} P \subset F_P \end{cases}$$

ということに他ならない。

これから、elliptic operator の場合は、$F_P = \phi$ であるから、良く知られた次の結果が従う。

系：P を elliptic operator とすると、

1) $Pu = f$ はつねに解ける

2) $Pu = f$ に於て、f が analytic function ならば、解 u も analytic function である。

ところで（11）の結果をさらに精密化することが、つまり F_P をさらに小さいものでおきかえることが、当然問題になる。これは Lewy に始まって、Hörmander が最も本質的な仕事をし、さらにこれを Egorov, Nirenberg, Trèves らが精密化した。hyperfunction の場合、この平行したことを、Schapira, 鈴木らが行った。しかし、これらはいずれもどんな条件のもとで F_P が空になるか、という形で問題をたてている。我々は S^*M 上にもちあげることによって、さらに徹底して、operator の symbol の形から、その bracket などをとることによって、定理の F_P よりも小さい best possible な閉集合を求めることを行う。それが空になる条件として、彼らの結果が得られる。この Nirenberg - Trèves type の問題

については．河合がかなりいいところまで進んでいるが．今は他のことに忙しくて手がまわりかねている。

5月28日.

Sheaf C について少しちゃんとした定義をする。

幾何的準備として、代数幾何で用いられる monoidal 変換の real analytic での類似について説明する。これも monoidal 変換と呼んでさしつかえない。

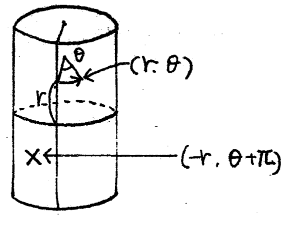
まず簡単な例から話す。二次元平面の中で一点の様子を調べたい時に、いわゆる極座標を用いる。これがこの時 monoidal 変換になっている。二次元平面

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y)\ ;\ x, y \in \mathbb{R}\}$$

の極座標とは、cylinder

$$\mathbb{R} \times T = \{(r, \theta)\ ;\ \theta \text{ は modulo } 2\pi\}$$

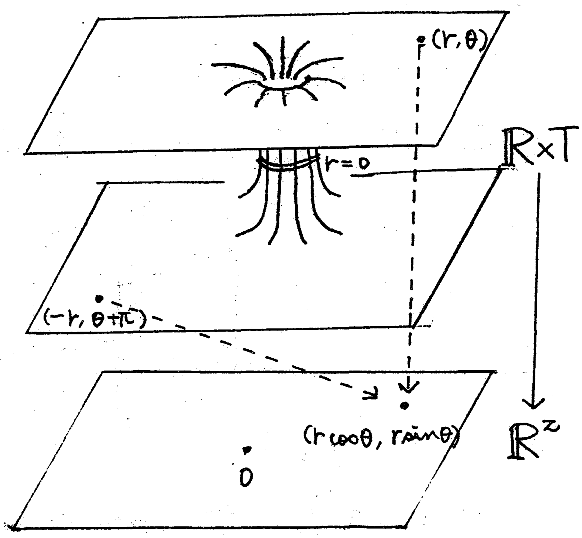
(T は一次元トーラス)



から、$\mathbb{R}^2$ への写像

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times T & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \Psi & & \Psi \\ (r, \theta) & \longrightarrow & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

を考えることである。これを図示するとおよそ右図の様になる。(r, θ) と $(-r, \theta+\pi)$ とは同じ点にゆくから、(1)は2:1の写像になっている。ただ1ヶ所例外があって、$r=0$ のところだけは、すべて原点にうつっている。つまり普通のところは直交座標とたいしてかわらないが、原点のところだけが拡大されている。ちょうどメルカトール図法によれば北極の近傍の様子が非常に良くわかることにあたる。



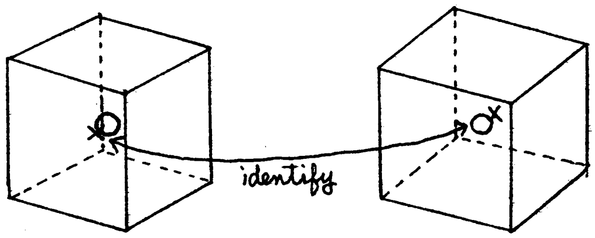
(1)は明らかに、*real analytic map* で、つまり解析多様体間の *morphism* になっている。一般の点で 1:1 にするには、(r, θ) と $(-r, \theta+\pi)$ とを *identify* してやればよい。これも又 *real analytic manifold* になる。こうすると(1)は原点以外では *isomorphic* である。そして原点の逆像は

$$S^1/\{\pm 1\} = \mathbb{P}^1$$

（real 1次元射影空間）

になる。こちらの方が代数幾何でいわれる *monoidal* 変換、あるいは *blowing-up* である。

一般の場合も同様であって、$\mathbb{R}^n$ 内の原点の monoidal 変換とは、２枚の $\mathbb{R}^n$ の copy を用意して、一方は向きづけを反対にして各々表の世界、裏の世界と考える。



各々の原点に空をあけてそれをこじあけて、無限に小さな S^{n-1} をさし込み、その antipodal（反対側）の点を互いに identify してやると（向きづけが逆になっているので）うまく copy がつながって real manifold になる。これは一般点で２:１になっている写像だから、この互いに反対側にある２点を同一視してやれば、原点以外ではもとの $\mathbb{R}^n$ と同型で、原点の逆像は、

$$S^{n-1}/\{\pm 1\} = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}$$

になっている。この原点にさしこんだ S^{n-1} は（後に述べるが）原点での無限小ベクトルを正のスカラーでわった

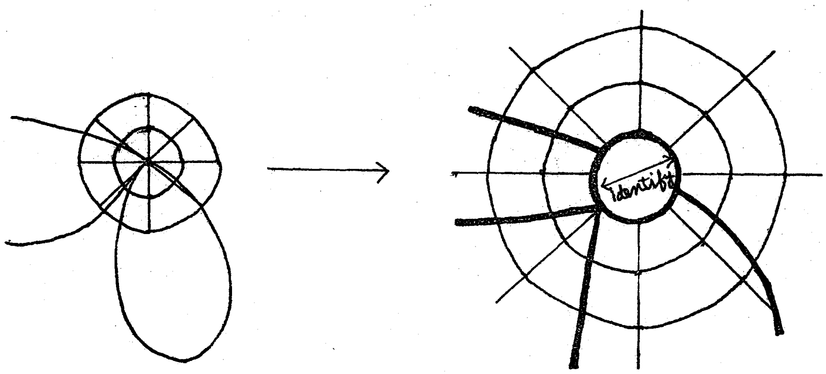
$$T_0\mathbb{R}^n - \{0\}/\mathbb{R}^+ \simeq S\mathbb{R}_0^n$$

であるので、±1 でわった方は

$$T_0\mathbb{R}^n - \{0\} / \mathbb{R} - \{0\} \simeq P\mathbb{R}_0^n$$

である。従って、この方は $\mathbb{R}$ に限らず、任意の体上の多様体に対して定義される。我々も $\mathbb{C}$ 上で monoidal 変換をする時は、こちらを用いる。

こうすると原点の様子が拡大されてよく分る。広中の、代数多様体、あるいは解析空間の特異点の resolution はこの事を用いている。例えば、下の左図の様な特異点があった時、これを blowing up すれば、右図の様になり、特異性がばらされて簡単になっている。こうして何度も monoidal 変換を繰り返せば、結局 singularity が解消できてしまうというのである。



我々の C も原理は同じである。我々は real manifold を complex の中に置いてその complex な方向からの boundary value として hyperfunction B を定義した。そこで、この B はいろいろな方向からの boundary value を含んでいるから

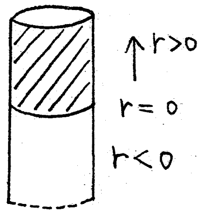
非常に複雑である。そこで real manifold を blow-up してやれば各方向が区別できて、そこでは超函数の構造が比較的簡単なものに分析できると期待できるのは自然である。そして実際この方法でつくった sheaf C は微分方程式論への非常に良い応用をもつ。

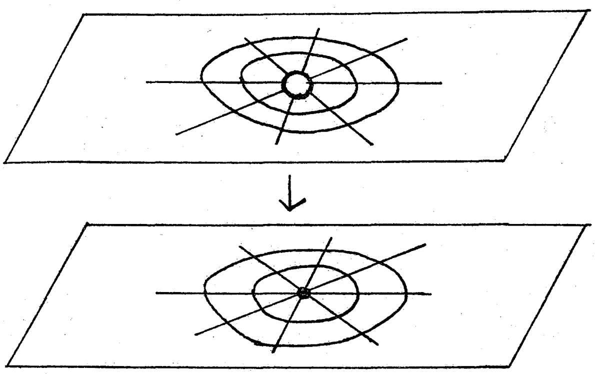
尤も、我々はこの resolution との analogy で出発したわけではない。Fritz-John の方法を一般化しようとして、昨日話した holomorphic function の分解ということから、sheaf C の概念を得、このCを座標系によらず、intrinsic に定義しようとして苦心しているうちに、monoidal変換の概念に到達したのである。とまれ、monoidal 変換によって複雑な singularity をより簡単なものに分解してしまおうという考え方が軌を一にして用いられているのは面白い。

しかし、非常に違う点もある。我々の場合は monoidal 変換そのものが役に立つのではなくて、その裏返しにあたる、いわば comonoidal変換とよぶべきものが大切である。monoidal 変換はその中間段階にあらわれる。

又、我々の場合は real で考えるので、$\{\pm 1\}$ でわらないものの方が重要である。こちらを real での monoidal変換と呼ぶ。しかし2枚の copy を考えるのは煩雑なので、表の世界だけをとって考える。はじめの例でいえば、円筒の上半

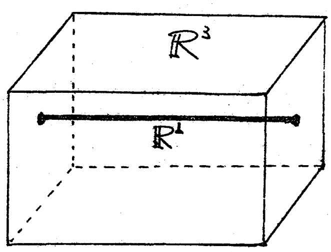
分$r \geqq 0$ の部分だけをとる。すると、これはやはり原点以外では同型で、原点の逆像はS^1になり、しかもこれがmanifoldのboundaryとしてあらわれる。写像を図示すれば、次のようになる。



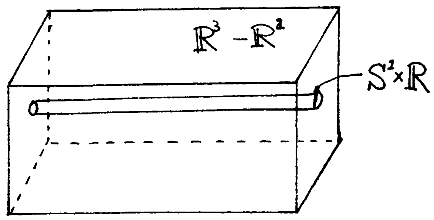


以下ではこの様なrealなmonoidal変換だけを扱う。

今までのは、一点のblowing-upであったが、$\mathbb{R}^3$ の中のline $\mathbb{R}^1$のblowing-upについて考えよう。これも一点の場合と全く同様であって、今度はnormalな方向にblowing-upしてやればよい。つまり$\mathbb{R}^1$の部分に細いトンネルをあけてやって、この壁に、S^1をfibreとするfibre spaceをうちばりしてやるのである。ここで更に、$S^1 \times \mathbb{R}^1$のantipodalな点を同一視してやれば 普通の意味の



monoidal 変換になる。



これを formal にいうには次のようにいえばよい。まず簡単な場合として、一点の blowing up を考えよう。M^n 内の点 x をとる。M^n の x における tangent space T_xM は x での無限小近傍を考えているのであるから、

$$T_xM-\{0\}/\mathbb{R}^+=S_{x_0}M\ (\simeq S^{n-1})$$

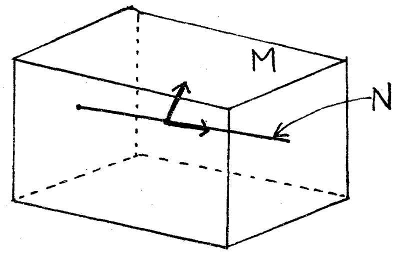
は x から出る無限小 vector の方向だけを考えている。M^n を x で monoidal 変換した時に、内ばりされるのは、この S^{n-1} なのである。そこで M の x における monoidal 変換 ${}^x\tilde{M}$ とは

$${}^x\tilde{M}=M-\{x\}\cup S_xM$$

として定義すればよい。ここには先に述べたように自然に topology が入り、更に実は analytic structure が入る。但し boundary のない analytic manifold にするには copy を2枚用意して、S^{n-1} の antipodal ではりあわせるという操作が必要である。このままでは、内側に boundary S^{n-1} をもった real analytic manifold になる。

一般に、多様体 M があって その閉部分多様体 N がある時、M を N を中心にして monoidal 変換するとは、次の様に

定義すればよい。



さて、各点 $x \in N$ に対し、T_xN は T_xM に自然に含まれている。この商空間 T_xM/T_xN は、x における normal vector space と呼ばれる。M が riemannian metric 等をもっていれば、これは文字通り N に垂直な、M内の tangent vector の全体に一致するが、一般の場合はこうして商空間をとって考えれば、normal な vector というのを考えるには十分である。この vector space は丁度、N の M における余次元、$\dim M - \dim N$ だけの次元をもつ。各点 x を N 全体で動かした時、その normal vector space 全体は又、自然に vector bundle になり、これを N の M に於ける normal bundle とよび、T_NM であらわす。つまり、

(1) $$0 \longrightarrow TN \longrightarrow N \underset{M}{\times} TM \longrightarrow T_NM \longrightarrow 0$$

($N \underset{M}{\times} TM$ は TM を N 上への制限した bundle)

この T_NM から作った(余次元 − 1)次元の sphere bundle

$$S_NM = (T_NM - N)/\mathbb{R}^+$$

は N の M に於ける normal sphere bundle と呼ばれ、N の各点での normal な「方向」を集めたものになっている。

すると N を中心とした M の monoidal 変換 ${}^N\widetilde{M}$ とは

$$(ス)\qquad {}^N\widetilde{M} = (M-N) \cup S_N M$$

として定義される。ここには自然に位相が入り、更に boundary つきの analytic manifold になる。この boundary は余次元 1 であることに注意しておく。${}^N\widetilde{M}$ から M は自然な全射があって、${}^N\widetilde{M} - S_N M \xrightarrow{\sim} M-N$ である。

$$\begin{array}{ccc} {}^N\widetilde{M} & \supset & S_N M \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \supset & N \end{array}$$

$S_N M$ のかわりに normal projective bundle $P_N M$ を用いれば、これは complex analysis でいう monoidal 変換が得られ、これは普通の manifold の構造が入る。更にこの方は N に singularity があっても定義される。boundary value problem などを考える場合はこうしたものも必要になってくる。

我々はこの monoidal 変換を今どの様に用いるかというと、M を考えている real manifold とし、X をその complex neighbourhood として、この M を中心にして X の中で blow up するのである。(X を $2n$ 次元の real manifold と考える)すると imaginary からの方向が分解されて、超函数の boundary value としての性質がよく分るようになる。

先の(1)式にあたるのは、ここでは、

$$0 \to TM \longrightarrow M \underset{X}{\times} TX \longrightarrow T_M X \to 0 \quad \text{(exact)}$$

各点でみれば、

$$0 \longrightarrow T_x M \longrightarrow T_x X \longrightarrow T_M X_x \longrightarrow 0$$

ところで $T_x X = T_x M \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}$ であるから、自然に

$$T_x X = T_x M \oplus \sqrt{-1}\, T_x M$$

故に、

$$T_M X_x \xleftarrow[\sim]{\times\sqrt{-1}} T_x M$$

M上全体では

$$T_M X = \sqrt{-1}\, TM \simeq TM$$

$$S_M X = \sqrt{-1}\, SM \simeq SM$$

従って、Mを中心としたXの *blow up* ${}^M\tilde{X}$ で、Mのかわりにさしこまれるものは、($\sqrt{-1}$ 倍された) SM と考えてよい。この $\sqrt{-1}$ 倍というのは前にもちょっと述べたが、*imaginary* な方向からの *boundary value*，或いは Fourier 変換というものと関係がある。

解析に於ては、この裏返しにあたる comonoidal 変換というものを考えねばならない。

Situation はさっきと同様で、real manifold M 内に submanifold N をとる。

(1) の dual sequence (3) を考えると conormal bundle T_N^*M が定義される。

(3) $$0 \longrightarrow T_N^*M \longrightarrow N \underset{M}{\times} T^*M \longrightarrow T^*N \longrightarrow 0$$ (exact)

T_N^*M は T_NM の dual bundle であって、この各点 x での fibre vector space は conormal vector space とよばれる。これからつくった sphere bundle

$$S_N^*M = T_N^*M - N/\mathbb{R}^+$$

を conormal sphere bundle とよぶ。この各 fibre の元は、T_xM の原点を通る（表裏のある）hyperplane（又は半空間と考えてもよい）であって、N に沿う方向を全て含んでいるものということができる。

さて、我々はこの S_N^*M を N のかわりに M の中にさし込もうというのだから位相を定義するには、少々不自然なことをしなければいけない。不自然というなら Zariski 位相だって

不自然であって、Hausdorff にならない。ここでもそういった意味で不自然だというのであって、論理的には全く自然なのである。

まず集合としては、Nを中心としたMの comonoidal 変換とは、

$$(4)\qquad {}^{N}\widetilde{M}^{*} = (M-N) \amalg S_N^{*}M$$

として定義する。これにどんな位相を入れるかが問題である。${}^{N}\widetilde{M}$ の時は 自然に位相が入ったが、今度はそうはゆかないので、analytic な structure というものは入らない。$(M-N)$ は開集合、$S_N^{*}M$ は閉集合となるべきだから、$M-N$ の方は問題なく、もとの位相でよい。

問題は $S_N^{*}M$ の各点の近傍の定義である。この為にまず、S_NM と $S_N^{*}M$ との N 上での fibre 積を考える。この元は

$$\{(x,\bar{\xi},\bar{\eta});\ x\in N\quad \overset{(\neq 0)}{\xi}\in T_NM_x,\ \ \eta(\neq 0)\in T_N^{*}M_x\}$$

(ξ, η は modulo $\mathbb{R}^{+}$ で考える。)

とあらわせる。T_NM_x と $T_N^{*}M_x$ との間には内積が定義されているが、

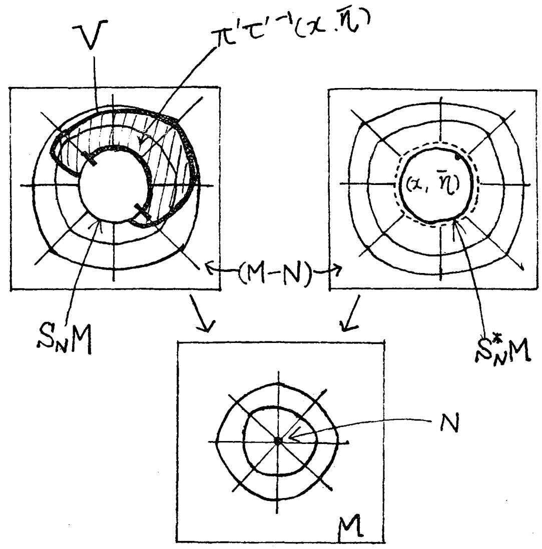
$$\langle \xi, \eta \rangle \geq 0$$

というのは、ξ, η の modulo $\mathbb{R}^{+}$

$$\begin{tikzcd}
S_NM \arrow[dd] & \times_N \arrow[d, phantom, "\cup"] & S_N^{*}M \arrow[dd] \\
 & D_NM \arrow[dl, "\pi'"'] \arrow[dr, "\tau'"] & \\
S_NM \arrow[dr, "\tau"'] & & S_N^{*}M \arrow[dl, "\pi"] \\
 & N &
\end{tikzcd}$$

のとり方によらない。そこで，$D_NM=\{(x,\xi,\bar{\eta});\langle\xi,\eta\rangle\geq 0\}$ という集合を考えれば，これはファイバー積内の半分(強)の閉集合になる。この半分というのは essential であって，解析的には Fourier 変換にあたる。

この D_NM を用いて，$(x,\bar{\eta})\in S_N^*M$ の近傍は次の様に定義される。



$\pi'\tau'^{-1}((x,\bar{\eta}))$

$=\{(x,\xi)\mid\langle\xi,\eta\rangle\geq 0\}$

は S_NM 内の closed hemisphere である。この hemisphere のかってな近傍 V in ${}^N\widetilde{M}$ に対して

$S^*V=\{(y,\bar{\eta}');\pi'\tau'^{-1}(y,\bar{\eta}')\subset V\}$

なる集合は S_N^*M の open set で

$$V\cap(M-N)\amalg S^*V$$

を $(x,\bar{\eta})$ の近傍としてやるのである。

これがなぜ変な位相かといえば，locally Hausdorff にさえならない。

Cの定義はここまで来ればあとは一足とびに出来る。この

定義は未だどこにも書いてない新しいものであるが．この方が分りやすいと思う．

まず．Bの定義を思い出してほしい．n次元 real analytic manifold M^nがあるとき．M上の hyperfunction $\mathcal{B}(M)$ とは．Mの complex neighbourhood X をとれば．

$$\mathcal{B}(M) = H^n(X \bmod X-M \ , \mathcal{O}_X)$$

として定義された．この時．n次元以外の相対 cohomology はすべて vanish したのであった．又これを localize したのが．hyperfunction の sheaf $\mathcal{B}$ であって．しかも

$$\mathcal{B}(M) = \Gamma(M, \mathcal{B})$$

となる．さらに実は$\mathcal{B}$は flabby sheaf であった．

sheaf $\mathcal{C}$ も全く同様である．

一つ sheaf の言葉を準備しておく．

位相空間の連続写像 $f: Y \to X$ があって X上に sheaf $\mathcal{F}$ が与えられた時．

$$\begin{array}{ccc} Y & & f^{-1}\mathcal{F} \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ X & & \mathcal{F} \end{array}$$

その inverse image の sheaf $f^{-1}\mathcal{F}$ というものが定義される．これは sheaf $\mathcal{F}$ を sheaf space として位相空間としてとらえれば．(i.e $\mathcal{F} = \bigcup_x \mathcal{F}_x$: $\mathcal{F}_x$ は x上の$\mathcal{F}$の stalk)

$$f^{-1}\mathcal{F} = Y \underset{X}{\times} \mathcal{F}$$

（位相空間として）

として定義される。$\mathcal{F}$をpresheafとしてみる定義を用いるともう少し手のこんだ定義をしなければならない．とにかく．要するに，大切なことは

$$(f^{-1}\mathcal{F})_y = \mathcal{F}_{f(y)}$$

となっている点である。これは従って f のfibre上ではconstant sheafである。

さてsheaf $\mathcal{C}$ の定義に戻る．X内でMを中心としてcomonoidal変換する。すると $\pi^{-1}\mathcal{O}_X$ が ${}^N\tilde{X}^*$ 上のstructure sheafになって次の定理がなりたつ。

$$\begin{tikzcd} {}^N\tilde{X}^* \arrow[d, "\pi"] & \sqrt{-1}S^*M \arrow[l, hook'] \arrow[d, "\pi"] \\ X & M \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

定理：$\pi^{-1}\mathcal{O}_X$ は $\sqrt{-1}S^*M$ に関して purely-n-codomensional である。

そこで

$$\mathcal{C} = \mathcal{D}ist^n(S^*M, \pi^{-1}\mathcal{O}_X)$$

と定義する。定理から．

$$\mathcal{C}(S^*M) = H^n({}^M\tilde{X}^* \bmod {}^M\tilde{X}^* - \sqrt{-1}S^*M, \pi^{-1}\mathcal{O}_X)$$

このsheaf C もflabby sheaf である。これは柏原による大切な定理である。

基本関係式

$$C(S^*M) = \mathcal{B}(M)/\mathcal{a}(M)$$

は次の様に示される。

位相空間のtripleがあって互いにopen immersionとする。

$$X \underset{\text{open}}{\hookleftarrow} Y \underset{\text{open}}{\hookleftarrow} Z$$

するとX上のsheaf $\mathcal{F}$ に対して次の様な相対cohomologyのlong exact sequenceがあった。

$$\cdots \to H^n(X \bmod Y.\mathcal{F}) \to H^n(X.\mathcal{F}) \to H^n(Y.\mathcal{F})$$
$$\to H^{n+1}(X \bmod Y.\mathcal{F}) \to \cdots$$

$$\cdots \to H^n(X \bmod Y.\mathcal{F}) \to H^n(X \bmod Z.\mathcal{F})$$
$$\to H^n(Y \bmod Z.\mathcal{F}) \to H^{n+1}(X \bmod Y.\mathcal{F}) \to \cdots$$

この拡張として一般に、位相空間のtripleの間に連続写像があるとする。

$$X \xleftarrow[f]{} Y \leftarrow Z$$

この時に．$H^n(X \leftarrow Y, \mathcal{F})$ という拡張された相対 cohomology というのが．X上の sheaf $\mathcal{F}$ に対して定義されて．前の2つの long sequence に倣った次の sequence がなりたつ．

$$(5)\quad \cdots \longrightarrow H^n(X \leftarrow Y, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(Y, f^{-1}\mathcal{F}) \longrightarrow H^{n+1}(X \leftarrow Y, \mathcal{F}) \longrightarrow \cdots$$

$$(6)\quad \cdots \longrightarrow H^n(X \leftarrow Y, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(X \leftarrow Z, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(Y \leftarrow Z, f^{-1}\mathcal{F}) \longrightarrow H^{n+1}(X \leftarrow Y, \mathcal{F}) \longrightarrow \cdots$$

もし．この f が open set の inclusion map なら．

$$H^n(X \leftarrow Y, \mathcal{F}) = H^n(X \bmod Y, \mathcal{F})$$

になる。

この拡張された相対cohomologyを右図の (π, i) に対して用いよう。すると (6)から

$$\begin{tikzcd} {}^M\tilde{X}^* \arrow[d, "\pi"'] & {}^M\tilde{X}^* - \sqrt{-1}S^*M \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[d, equal] \\ X & X - M \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

$$(7)\quad \cdots \longrightarrow H^p(X \leftarrow {}^M\tilde{X}^*, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^p(X \leftarrow X-M, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^p({}^M\tilde{X}^* \leftarrow {}^M\tilde{X}^* - \sqrt{-1}S^*M, \pi^{-1}\mathcal{O}_X) \longrightarrow \cdots$$

となる。才一項は容易に計算されて．

$$H^p(X \leftarrow {}^M\widetilde{X}^*;\ \mathcal{O}_X) = \begin{cases} 0 & p \neq n \\ \mathcal{A}(M) & p = n \end{cases}$$

オ二項、オ三項は 普通の相対cohomology だから

$$H^p(X \leftarrow X - M,\ \mathcal{O}_X) = \begin{cases} 0 & p \neq n \\ \mathcal{B}(M) & p = n \end{cases}$$

$$H^p({}^M\widetilde{X}^* \leftarrow {}^M\widetilde{X}^* - \sqrt{-1}S^*M,\ \pi^{-1}\mathcal{O}_X) = \begin{cases} 0 & p \neq n \\ \mathcal{C}(M) & p = n \end{cases}$$

故に

$$0 \to \mathcal{A}(M) \to \mathcal{B}(M) \to \mathcal{C}(S^*M) \to 0$$

又 localize して

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \pi_*\mathcal{C} \longrightarrow 0$$

が得られた。

さてこの定義では monoidal 変換が表面に出てこなかったが、一昨年はじめに sheaf C を intrinsic に定義した時は、もっと monoidal 変換を積極的に使った。今 数学のあゆみ等に出ているのは すべてその流儀による。この少し古いやり方についてちょっと触れておこう。

さっきと同じことを、monoidal 変換の方でやると、${}^M\widetilde{X}$ の

位相は自然であるので、${}^M\tilde{X}$ の structure sheaf $\tau^{-1}\mathcal{O}_X$ は $\sqrt{-1}SM$ に対して、その幾何的な image と合致して、purely 1-codimensional になる。そこで生き残ったものを

$$
\begin{tikzcd}
{}^M\tilde{X} \arrow[d, "\tau"'] & {}^M\tilde{X} - \sqrt{-1}SM \arrow[l, hook'] \arrow[d, equal] \\
X & X - M \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}
$$

$$\mathcal{Q} = \mathcal{D}ist'(\sqrt{-1}SM, \tau^{-1}\mathcal{O}_X)$$

とおく。(7) に対応した sequence から 同様にして、

$$0 \to \mathcal{A}(M) \to \mathcal{B}(M) \longrightarrow H^{n-1}(SM, \mathcal{Q}) \to 0$$

或いは localize した

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{H}^{n-1}_{\tau}\mathcal{Q} \longrightarrow 0$$

となる。ここで DM をとって考えると

$$\mathcal{H}^{p}_{\tau'}(\pi'^{-1}\mathcal{Q}) = \begin{cases} 0 & (p \neq n-1) \\ \mathbb{C} & (p = n-1) \end{cases}$$

$$
\begin{tikzcd}
 & DM \arrow[dl, "\pi'"'] \arrow[dr, "\tau'"] & \\
\sqrt{-1}SM \arrow[dr, "\tau"'] & & \sqrt{-1}S^*M \arrow[dl, "\pi"] \\
 & M &
\end{tikzcd}
$$

となって $\mathbb{C}$ が得られる。

これらの定義は 同等であって π' であげて τ' で おとすという操作を位相空間の方でやるか、sheaf の方でやるかの違いにすぎない。

hyperfunction $\mathcal{B}$ がそのままでは扱いにくいので、S^*M 上に sheaf $\mathcal{C}$ を作ってそこで分解して考えるのと同じ様に、differential operator の sheaf も P^*X 上の pseudo-differential operator sheaf にあげて考えるのが自然である。differential operator の sheaf は X の直積 $X\times X$ 内の 対角線 Δ_X に於ける相対 cohomology $\mathcal{D}ist^n(\Delta_X, \mathcal{O}^{(0,n)}_{X\times X})$ ($\mathcal{O}^{(0,n)}_{X\times X}$ は後の変数に 0 としては n-form になっている sheaf) として定義されるので、この Δ_X を $X\times X$ 内で comonoidal 変換した $\Delta_X \widehat{X\times X}^*$ を用いて、ΨDO sheaf は P^*X 上に定義される。但し、complex での comonoidal 変換の定義の時は、さっきの DM のかわりに、内積が zero になる点を集めた hypersurface を用いる。実は、まだ少々やり残している所があるが、こうして cohomological に定義できることは確かである。

Pseudo-differential operator (ΨDO) の sheaf までゆくと、formal な議論が素晴らしく強力になる。丁度、函数概念が cotangential な方向への分解によって非常に精密な記述が可能になった。そしてそれは real manifold を complex neighbourhood の中で blow up してやることによって境界値としての意味付けがはっきりしたことに基くのであるが、それと同じように differential operator を ΨDO という概念を導入して S^*M 又は P^*X 上の operator に

あげて分解してやることによって operator の構造、解の存在定理、その解析性、特異性の伝播など operator に関した問題を非常に明瞭に見、且つ解決することができる。

ΨDO sheaf $\mathcal{P}$ の直観的な定義は昨日述べたが、$\mathcal{P}$ は別の言葉で言えば、昨日述べた基本定理から、次の様になる。つまり $(x, \bar{\eta}) \in S^*M$ に対し、$\mathcal{P}(x, \bar{\eta})$ は x の近傍の operator でその symbol が η 方向に non-charactoristic なもの、つまり $P_m(x, \eta) \neq 0$ であるようなものを分母として許す, localization の適当な意味での完備化と考えることができる。昨日述べた基本定理とは、

定理: Pseudo-differential operator

$$P(x, D) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{m-j}(x, D) \in \mathcal{P}(x_0, \bar{\eta}_0)$$

に対し、

$$P_m(x_0, \bar{\eta}_0) \neq 0$$

$$\Longrightarrow (x_0, \bar{\eta}_0) \text{ の近傍で、} P(x, D) \text{ は invertible.}$$

さらに ΨDO に於て低階の項が影響しないということは次の定理から導かれる。(同じ紀要に載っている)

定理：2つの m 階の Pseudo-differential operator

$$P(x, D) = \sum P_{m-j}(x, D)$$
$$Q(x, D) = \sum Q_{m-j}(x, D)$$

があってその symbol が一致しているとする。

$$P_m = Q_m$$

もし (x_0, η_0) に於て これらがたかだか simple characteristic

$$(P_m(x_0, \eta_0), \ \mathrm{grad}_{\eta_0} P_m) \neq (0, 0)$$

ならば (x_0, η_0) に於て elliptic な operator R, S が存在して

$$Q = RPS$$

とあらわされる。

elliptic な operator はその点の近傍で invertible なのであるから、それによる変換によって operator のいろいろな性質は当然保たれる。従って operator P に対し、$Q = P_m$ とおいて上の定理を用いれば、operator に於て低階の項の contribution が全くないことが知られる。

この定理は非常に強力で、これを用いると overdetermined system に対するものすごく一般的な定理がかんたんに証明できてしまう。

定理：一個の未知函数に対する overdetermined system が高々 simple characteristic であれば、これは次の形の方程式と同値である。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \\ \quad\vdots \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_k} = 0 \qquad (k \leq \dim M) \end{cases}$$

この証明には、座標変換だけでは足りないので、いわゆる接触変換が必要になる。つまり S^*M を M 上の fibre bundle として考えることをやめて、S^*M 自身を $(2n-1)$ 次元の contact structure をもった manifold と考えて、その上で自由な接触変換を行う。この為には、最近 Egorov, Hörmander 等によって展開されている、Fourier integral operator の概念が必要になる。これを我々の場合に結びつけるとずっとすっきりと展開できる。overdetermined system はむつかしいと思われていたようであるが、こうして simple characteristic なところでは全く簡単なのである。

質問　　微分方程式、或いは作用素の singular support とは何か。

微分方程式が coherent $\mathcal{D}$-module $\mathcal{M}$ のことであるというのは前にやった。この $\mathcal{M}$ を π で上にもちあげた $\pi^{-1}\mathcal{M}$ を $\mathcal{P}$ で係数拡大した $\mathcal{P}\otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}}\pi^{-1}\mathcal{M}$ の support を $\mathcal{M}$ の singular support とよぶ。

$$
\begin{tikzcd}
S^*M \arrow[d, "\pi"] & \mathcal{P}\otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}}\pi^{-1}\mathcal{M} \\
M & \mathcal{M}
\end{tikzcd}
$$

これを直観的にいえば、$\mathcal{P}$ で係数拡大するということは、non-characteristic な operator による わり算を許すということで、$\mathcal{M}$ がそこで zero になるということは、そのわり算、つまり逆operator をかけることで、方程式が trivial になる事を意味する。例えば単独の方程式

$$Pu = 0$$

についていえば、P がある点で non-characteristic なら P^{-1} をかけることができて

$$u = P^{-1}Pu = 0$$

uは抽象的な方程式のgeneratorであったことを考えれば、$u=0$であるということは方程式が何もないということに他ならない。

5月28日 (Seminar)

応用について

線型偏微分方程式に対する河合による めざましい応用があるが、この他にもいくつかの応用がある。

素粒子論への応用------ Martineau による Edge of the wedge に始まるが、最近 森本(先生) による多変数函数論的素粒子論への応用が著しい。例えば Lorentz invariant な超函数は、Lorentz 変換が双曲型の波動方程式を不変にすることから、その方程式の singularity を調べることにより、非常に強い特異性についての性質をみたしていることが分る。そもそも素粒子論で、多変数函数論が用いられるのは、正則包の概念、つまりあるところで定義された正則函数が、自動的により広いところまで接続できてしまうという事情のあることがうまく利用できるのである。そこで Lorentz invariant な超函数の support について前に述べた基本定理 "$Pu = 0$ なる方程式の解 f の singular support SSf は $\mathrm{Supp}(\mathcal{D}/\mathcal{D}P) = \{(x, i\eta) \mid P_m(x, \eta) = 0\}$ 内にある" という定理がうまく用いられる。

そもそも $\mathcal{C}$ の理論の出発点は Fritz-John plane wave の

方法で elliptic equation の解の analiticity を estimate などを余り使わずに Cauchy-Kovalevskaja だけを用いて導いているのをみて、これを我々の方法にあうように一般化しようとしたところにあって、その必然的に生まれたものであった。だから、この基本定理を導く為に $\mathcal{C}$ が必要であったといえる。尤も今となれば、これは plane wave なども使わずにできてしまったが。

表現論への応用…… unitary 表現論に於て、character などを distribution として使っているが、ここでは実は複素函数の境界値という考え方をかなり explicit に用いている。彼らは hyperfunction の概念を知らないので、そうしているのであるが、hyperfunction として捉えれば、ずっと理論が自然になってすっきりすると思われる。

例えば

G : semi-simple Lie group

K : maximal compact subgroup

G/K : symmetric space

とする。

K 上の表現は、いわゆる Peter-Weyl の理論によってすべて有限次元になってちゃんと分る。しかし G 上では

unitary表現とよばれる無限次元のものになってむつかしい。

この表現のtraceなどは 函数にはならず，distribution又は hyperfunctionとしてとらえられる。つまりcharacterというのは表現のmatrix のtraceである。

$\mathcal{H}$: Hilbert space

$\mathcal{U}(\mathcal{H})$: $\mathcal{H}$上の unitary transformation group

とすれば，Gの $\mathcal{H}$ への表現とは，連続写像

$G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$

のことである。これは無限次元のmatrixであるから，traceなどというものは まともには定義できない，例えば $g=1$ のtraceは Hilbert 空間の次元になるから，無限大になる。しかし，これをδ函数と捉えれば，distribution としての解釈がつく。これらは Harish-Chandra 等によって，大変な努力の後に，膨大な体系として築かれた。しかしこれをhyperfunction的にやれば，もっとはるかに明瞭になると思う。

その一例を述べよう。trace というのは inner automorphismで不変，つまりadjoint表現 で不変である。つまり，

$$\chi(g' g g'^{-1}) = \chi(g)$$

これからLie環へ，つまり無限小変換にうつれば，G の

Lie環 $\mathfrak{g}$ の元 γ に対し、自然にきまる。ある種の線型微分方程式、

$$X_\gamma \chi = 0$$

の解になっている。しかも もっと大切なことは、$\mathfrak{g}$-invariant な二階の Casimir operator Δ の固有函数に χ がなっていることである。

$$\Delta \chi = c\chi \quad (c\text{：固有値})$$

さて、Gの複素化は、complex semisimple Lie group でこの構造は良く分っている。ここには maximal な compact subgroup Kが innerautom. をのぞいて unique にきまる。例えば SL(n, ℝ) の複素化 SL(n, ℂ) を考えると、この maximal compact subgroup は special unitary group SU(n) であって、しかも SU(n) の複素化として SL(n, ℂ) が得られる。これらの複素 affine 代数群と max. compact group との間の関係を与えるのが いわゆる淡中 duality あるいは Chevalley の理論である。そうしてこの compact group を用いることによって complex semisimple group の構造が知られる。

compact group 上では Haar measure によって群全体で積分するという強力な方法によって Weyl が表現論を完成

しにが unitary 表現 のことはそんなに簡単にはゆかないで、膨大なものになって今なお続いている。

さて semi-simple group というのはとても条件が厳しいので、G不変な metric が unique に決ってしまう。ところがこの metric は K上では positive definite だが G/K では negative definite で、G全体では indefinite な metric になる。そこで Casimir operator Δ は K上では普通の Laplacian であるが、G全体では indefinite な operator である。あらっぽく言えば、G の local coordinate を $(x,\cdots,y,\cdots)$ として $(x,\cdots)$ が K の coordinate であるとすれば

$$(1) \qquad \Delta = \circ\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \cdots\cdots - \circ\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 - \cdots\cdots$$

($\circ$ は positive number)

となっている。

先にもどって、X は G上の hyperfunction であったが、これを K に制限していろいろ調べることが必要になる。

この為に超函数の部分多様体への制限について述べねばならない。

M を real manifold, N をその submanifold とし、M の

local coord. $(x\cdots, y\cdots)$ はつねにNが$\{y=0\}$として定義されているようにとっておく。$(x=(x_1,\cdots), y=(y_1,\cdots))$

M上の超函数 $f(x, y)$ があたえられた時、Nに制限した $f(x, 0)$ は意味をもつか、ということを考える。これはいつもできるとは限らない。例えば

$\delta(x, y)$ ‥‥‥‥ できない

$\delta(x-y)$ ‥‥‥‥ できる $\longrightarrow$ $\delta(x)$

$f(y)\,\delta(x)$ ‥‥‥‥ できる $\longrightarrow$ $f(0)\,\delta(x)$
(f: analytic)

制限が自然に定義できるのは次の場合に限る。

$$\begin{array}{ccc} S^*M & \supset & S^*_N M \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \supset & N \end{array}$$

定理: $f \in \mathcal{B}(M)$,
$S^*_N M$ を conormal sphere bundle とする。S^*M 内に於て

$$SS_C f \cap S^*_N = \phi$$

ならば、自然に f のNへの制限 f/N が定義できる。

このimageを説明するよい例は初期値問題である。方程式

(2) $\quad P(x, D)u = 0.$

の $N=\{x_1=0\}$ での初期値問題を考えよう。この初期値問題が意味をもつ為には、初期平面N が(2)に対して

non-characteristic である必要がある．ところで(之)の解 f に対し

$$SS_C f \subset \mathrm{Supp.}\ \mathcal{P}/\mathcal{P}P$$
$$= \{ P_m(x.\eta) = 0 \} \subset S^*M$$

である。$\eta_0 = (1, 0, \ , 0) \in S^*M_x$ とすれば

N が (之) に対して non-characteristic

$$\Longleftrightarrow \quad P(0.\ x'\ ;\ \pm\eta_0) \neq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad (0.\ x'\ ;\ \pm\eta_0) \cap SS_C f = \phi$$

であるから．N が(之) に対して non-characteristic ということは、丁度．(之)の解 f の N への restriction が well-defined であるという situation にあたっていて．f/N が N に於る初期値を与えていることになる。微分は C での local operator であるから．当然，f の微分も N へ制限できて．初期値問題というのが．この場合考えることができる。

これと同じことが．unitary 表現の character $\chi \in \mathcal{B}(G)$ についても言える。χ は Δ の固有函数であるから

(3) $$(\Delta - c)\chi = 0 \qquad (c : \text{constant})$$

の解である。従って

$$SS_c\chi \subset \mathrm{Supp}(\mathcal{D}/\mathcal{D}(\Delta \cdots c))$$
$$= \{(x,y\,;\ i(\xi,\eta)\,;\ \xi^2-\eta^2=0\}$$

となっている。

問題はχをKに制限することができるか、ということである。できるのである。なぜならKのconormal bundleは

$$S^*_K G = \{(x,0\,;\ i(0,\eta))\ ,\ \eta \neq 0\}$$

とかかれる。ところが、この表示から明らかに

$$SS_c\chi \cap S^*_K G = \phi .$$

ゆえに $\chi|K$ はちゃんと意味をもつ。

K上へ制限してしまえば、Kはcompact群だから、有限次元でよく分っている。K上の表現を

$$\chi_{K,\nu} \qquad \nu = 1,2,\cdots\cdots$$

と書けば、

$$\chi|K = \sum m_\nu \chi_{K,\nu} \qquad m_\nu \in N$$

とあらわせる。これは一種のFourier展開である。実際Kが一次元torusであれば、χ_ν は $e^{i\nu\theta}$ となって、普通のFourier展開になる。

distribution では、この制限ということは、表現が regular なところで言えるにとどまるそうであるが、我々の立場でやれば、自然に例外なしに定義できてしまう。

ζ函数の函数等式の証明．……　ζ函数とは

$$(4)\qquad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

として定義され、これは $\mathrm{Re}\, s > 1$ で収束して解析函数になる。さらにこれはいたるところ解析接続できて、ただ $s=1$ で simple pole をもち、次の函数等式をみたすことはよく知られている。

$$(5)\qquad \zeta(1-s) = (2\pi)^{-s}\,\Gamma(s)\, 2\cos\frac{\pi s}{2}\,\zeta(s)$$

ここで注意すべきは (5) の左辺は $\mathrm{Re}\, s<0$，右辺は $\mathrm{Re}\, s>1$ で収束し、その収束域に共通部分がないことである。(5) の証明は無論よく知られているが、我々の立場から、何も使わない自然な証明をすることができる。

上のζを一般化した Hurwitz のζと呼ばれるものがあって次の式で定義される。

$$\zeta(s, a) = \sum_{n} |n+a|^{-s}$$

これは a が有理整数でないならば、やはり $\mathrm{Re}\, s > 1$ で収束する。一方、Apell の ζ と呼ばれるものがあって

$$\zeta_a(s) = \sum_{n \neq 0} |n|^{-s} e^{2\pi i n a}$$

で定義される。これは任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して、$\mathrm{Re}\, s > 1$ で収束する。ところで、$a \to 0$ とすれば、$\zeta_a(s) \longrightarrow 2\zeta(s)$ であり、$\zeta(s, a)$ の方も $|a|^{-s}$ の分を除けば、$2\zeta(s)$ に近づくことに注意しておく。

さて、これらの間に次の函数等式が (5) の拡張として成り立つ。

$$(6) \qquad \zeta(1-s, a) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)\, 2\cos\frac{\pi s}{2}\, \zeta_a(s)$$

こうして拡張すると、実は等式の解釈がずっと楽になって、しかも以下に述べる様に (5) を導びくことができる。

まず定義式から、

$$\zeta(s, a) \text{ は } \begin{cases} s \text{ につき holomorphic} \\ a \text{ につき analytic} \quad (a \notin \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\zeta_a(s, a) \text{ は } \begin{cases} s \text{ につき holomorphic} \\ a \text{ については hyperfunction} \end{cases}$$

である。実は a について $\zeta_a(s)$ は Schwartz の distribution になっている。更に、$\zeta_a(s)$ を (ζ, a) についての

distribution であって parameter s について holomorphic と考えてやると、$\mathrm{Re}\, s > 1$ という制限は明らかにもはや不要となる。そこで、$\zeta(s, a)$, $\zeta_a(s)$ はともに (s, a) 全体で定義された（$\zeta(s, a)$ の方は $a \notin \mathbb{Z}$ という条件が入るが）hyperfunction であって、そこでの Fourier 変換の理論を使うと、全く formal に (6) の函数等式が得られる。

(6) の右辺で $\zeta_a(s)$ の方は $(\mathbb{C} \times \mathbb{R})$ すべてで定義されるが、$\Gamma(s)$ が $\{0, -1, -2, \cdots\}$ で pole をもつので、結局 (6) の右辺は、

(7) $(s, a) \in (\mathbb{C} - \{0, -1, -2, \cdots\}) \times \mathbb{R}$ で定義され s については holomorphic

である。そこでこの函数等式 (6) によって $\zeta(s, a)$ を $\mathrm{Re}\, s > 1$, $a \notin \mathbb{Z}$ という範囲を越えて解析接続される。ただし、接続したところでの a についての analyticity はこのままでは分らないが、次の定理により分る。

定理： $f(x, \alpha) \in \mathcal{B}(I \times \mathbb{C}^r)$

I は $\mathbb{R}^n$ 内の open domain

が α について holomorphic とする。空でない開集合

$U \subset \mathbb{C}^r$ があって、$I \times U$ 上では $f(x, \alpha)$ は xについて real analytic

$\Longrightarrow$ $\forall \alpha \in \mathbb{C}^r$ に対し $f(x, \alpha)$ はxについて real analytic

つまり real analytic という性質が複素変数について解析接続できる。これは一種の regularity の伝播で、先の微分方程式の理論からも導けるが、このままでも直接示す事ができる、基本的な結果である。

函数方程式の証明にかえる。ちょっと $\zeta(s, a)$ に細工をして

$$\zeta(1-s,\ a) - |a|^{s-1} = \sum_{n \neq 0} |n+a|^{s-1}$$

とすると これは

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\, s < 0 & \text{で}\quad \text{holomorphic} \\ -1 < a < 1 & \text{で}\quad \text{real analytic} \end{cases}$$

になる。$|a|^{s-1}$ は distribution として定義されている事に注意する。大事な点は $a=0$ が除外値にならない点である。

ところで (6) の両辺から、$|a|^{s-1}$ をさし引いても、(7)の事実はそのまま成り立つ。一方 $\mathrm{Re}\, s < 0$ では、$-1<a<1$ に於て aについて analytic だから、さきの定理から、

$\zeta(1-s, a)$ は s の定義域 $\mathbb{C}-\{0,-1,-2,\cdots\}$ すべてにわたって，a について real analytic になる．そこで (6) の左辺に於て $a=0$ としてやることは意味があって，

$$= 2\zeta(1-s)$$

となる。一方 $\mathrm{Re}\, s > 1$ では (6) の右辺は

$$\zeta_0(s) = 2\zeta(s)$$

に等しい．従って (5) が得られた．

こうして積分表示などを使わずに singularity の伝播についての一般的な原理だけを用いて証明できてしまう．

—— 接触多様体 ——

まず formal な定義を与える．

定義．contact manifold（接触多様体）とは次の structure を言う．

$(X,\ \mathcal{O}_X,\ \mathcal{F})$ triple

- $(X,\ \mathcal{O}_X)$: 多様体
- $\mathcal{F}$: X 上の line bundle
- symmetric algebra $\bigoplus_{i=0}^{\infty}\mathcal{F}^i$ に $[\ ,\ ]$ なる演算が

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}^i \times \mathcal{F}^j & \longrightarrow & \mathcal{F}^{i+j-1} \\ \quad\ \ \Psi & & \Psi \\ (f,\ g) & \longrightarrow & [f,\ g] \end{array}$$

なる bilinear map で与えられて．条件．

・$[f, g] = -[g, f]$

・Jacobi identity

・Derivation axiom

$$[fg, h] = [f, h]g + f[g, h]$$

がなりたつ。　　　　（定義　終）

これでは不十分で一般には更に regularity の条件をつけて考える。丁度 non-singular な多様体が local ring に正則 parameter 系 がとれるとして定義されるのに対応する。まず．

$$\dim X = 2n-1$$

でなければならない．さらに

$x_1, \cdots\cdots, x_n$ ------ $\mathcal{O}_X$ の local parameter

$\xi_1, \cdots\cdots, \xi_n$ ------ $\mathcal{F}$ の local section

があって．$[x_i, \xi_j] = \delta_{ij} \in \mathcal{O}_X$ を満たす。ちゃんとやっていないが多分これでよいと思う．

これが実際のところ何を意味するのか．説明しよう．

我々は real manifold M 又は complex manifold X をとって．その cotangent sphere bundle S^*M．又は

cotangent projective bundle P^*X を考えた。
これらが正則な contact manifold になるのである。これらはどうつくられたかというと.

$$
\begin{array}{ccc}
P^*X \xleftarrow{\mathbb{C}-\{0\}} T^*X - X & & S^*M \xleftarrow{\mathbb{R}^+} T^*M - M \\
\downarrow \quad \swarrow & & \downarrow \quad \swarrow \\
X & , & M
\end{array}
$$

としてであった。以下簡単の為 X の方で考えよう。さて $T^*X - X$ は P^*X 上 fibre $\mathbb{C}-\{0\}$ の bundle であるが、これに 0 を補った.

$$L = (T^*X - X) \amalg P^*X$$

は自然に $Y = P^*X$ 上の line bundle になる。これは丁度 T^*X の zero section の blowing-up になっている。

さて. 我々はこの Y 又は L の tangent space を考えたいのである.

L の local coordinate は X のそれを $(x_1, \cdots, x_n)$ として

$$(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n, \eta_1, \cdots, \eta_n)$$

と書かれ. Y の方は 例えば.

$$(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n, p_1, \cdots, p_{n-1})$$

となる。ここで

$$p_i = \eta_i / \eta_n$$

ここで

$$\Omega = \sum \eta_i \, dx_i$$

は座標に invariant な L 上の 1-form になるから

$$d\Omega = \sum d\eta_i \wedge dx_i$$

も global に定義される。これはつまり、L の tangent space 上に skew-symmetric な bilinear form が定義されていることを意味する。これが symplectic structure である。しかも

$$\underbrace{d\Omega \wedge \cdots \wedge d\Omega}_{r} = 2^n dx_1 \wedge d\eta_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge d\eta_n \neq 0$$

である。これがさっきの正則なパラメーター系にあたる。

つまり正則な contact structure を与えるとは、L 上に 1-form であって、fibre 方向には整次一次で、かつ、その外微分の n 乗が zero にならないものを与えることに他ならない。

こうして contact structure は定義されるが、この正則なパラメーター系のとり方は unique ではない。つまり Y → X なる fibring から、contact structure が定まったのであったが、逆はいえないので fibring のとり方には任意性がある。この fibring の変換が接触変換である。

つまり.

$$\frac{\Omega}{\eta_n} = dx_n - p_1 dx_1 - \cdots\cdots - p_{n-1} dx_{n-1}$$

$$p_i = -\eta_i, \eta_n$$

とする。ここで別の filring で変換すると

(8) $$\frac{\Omega}{\eta'_n} = \rho(x'_n - p'_1 dx'_1 - \cdots\cdots, - p'_{n-1} dx'_{n-1})$$

$$(\rho = \eta_n / \eta'_n)$$

となる。これが接触変換である。L の方で言えば、これは正準変換とよばれ.

(8)bis $$\sum \eta_i dx_i = \sum \eta'_i dx'_i$$

であって η_i と η'_i との関係は(holomorphicで)斉次一次になっているものである。

具体例をあげよう.

$$\begin{aligned} & dx_n - p_1 dx_1 - \cdots\cdots - p_{n-1} dx_{n-1} \\ = {} & d(x_n - p_1 x_1 - \cdots\cdots, - p_{n-1} dx_{n-1}) \\ & \quad + x_1 dp_1 + \cdots\cdots, + x_{n-1} dp_{n-1} \end{aligned}$$

より

$$\begin{cases} x_n' = x_n - p_1 x_1 - \cdots - p_{n-1} x_{n-1} & \\ x_i' = p_i & i = 1, \cdots, n-1 \\ p_i' = -x_i & \end{cases}$$

は確かに上の条件(8)を満たす。これは空間と運動量とをいれかえる接触変換の例として古くから知られているものである。

もとのηでいえば、linearな正準変換で

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_n' = \dfrac{\langle \eta , x \rangle}{\eta_n} & \langle \eta \cdot x \rangle = \sum_1^n \eta_i x_i \\ \left. \begin{array}{l} \eta_n' = \eta_n \\ \eta_i' = -x_i \eta_n \end{array} \right\} \eta\text{につき1次} & \\ x_i' = -\eta_i / \eta_n & \end{array} \right. \quad \eta\text{について0次}$$

となる。

こうした接触変換を用いれば、Jacobiの理論で方程式の形が簡単になる。これはただの座標変換より自由度がずっと大きくなることによる。我々の立場でこの理論をすすめることができるが、そこにはFourier integral operatorの理論が用いられる。詳しい話は今日は時間がないので省略する。

文　　献

(微分方程式の一般理論)

O. Veblen, Invariants of quadratic differential forms, Cambridge Tracts No.24 (Cambridge Univ. Press, 1962)

(矢野健太郎訳, 二次微分型式の不変式, 白水社(1951))

E. Cartan, Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, Hermann, 1945

E. Kähler, Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen, Teubner, 1934

A. Weil, 数学の将来, 弥永昌吉訳

倉西正武, Lectures on involutive systems of partial differential equations, Publ. Soc. Math. Sao Paulo, Sao Paulo, 1967

松田道彦, Involutiveな偏微分方程式系について, 数学 21 (1969) 161-177

佐藤幹夫, 線型偏微分方程式について, 東大数学教室金曜談話会ノート第8巻(1960年6月24日)

柏原正樹, 偏微分方程式系の代数的研究(修士論文), Hyperfunctionsのシンポジウム(微分作用素の局所理論), 数学振興会セミナー報告集, 1970年12月, 東京, 1-148

(層Cをめぐって)

小松彦三郎, (a) 佐藤の超函数と定数係数線型偏微分方程式, 東大セミナリーノート 22.

(b) Relative cohomology of sheaves of solutions of differential equations, (Sem. Lions-Schwartz, 1966), 数学振興会セミナー報告集 (1969年堅田) 所載.

佐藤幹夫 (a) Hyperfunctions and partial differential equations, Proc. Int. Conf. on Functional Analysis and Related Topics, Univ. of Tokyo Press, 1969, 91-94

(b) Regularity of hyperfunction solutions of partial differential equations, Technical Report R.I.M.S. 82; also Proc. Nice Congress 1970.

佐藤-河合隆裕, 超函数の構造について, Hyperfunctionsへの応用を含んだ代数幾何のシンポジウム, 数学振興会セミナー報告集, 1969年8月, 堅田, 4.1-4.30

佐藤-柏原, 超函数の構造について. 数学の歩み, 15-1 (1970), 9-72

P. Schapira, Construction de solutions elementaires dans le faisceau C de M. Sato, Sem. Goulaouic-Schwartz 1970-1971, exposé N° 11

森本光生, Sur la décomposition du faisceau des germes de singularités d'hyperfonctions, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 17 (1970), 215-240

数理解析研究所講究録 108, 佐藤の超函数論とその周辺

〃 114, 佐藤の超函数論とその応用

〃 (近刊) 超函数論と偏微分方程式の理論

柏原－河合, Pseudo-differential operators in the theory of hyperfunctions, Proc. Japan Acad. 46 (1970), 1130-1134.

L. Hörmander, Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients, to appear in Comm. Pure. Appl. Math. 24 (1971)

河合, (a) Construction of local elementary solutions for linear partial differential operators with real analytic coefficients I and II, Technical Report R.I.M.S. 84 and 85, also to appear in Publ. R.I.M.S. 7 (1971)

(b) On the global existence of real analytic solutions of linear differential equations (I), (II), Proc. Japan Acad. 47 (1971) 537-540, and to appear in Proc. Japan Acad.

R. Harvey, Hyperfunctions and partial differential equations, Thesis, Stanford Univ., 1966

金子 晃, On continuation of regular solutions of partial differential equations to compact convex sets, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA. 17 (1970) 567-580

柏原, A remark on characters of unitary representations of semi-simple Lie groups, 表現論と大域解析学, 数理解析研究所講究録 (近刊)

小松-河合 Boundary values of hyperfunction solutions of linear partial differential equations, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ. 7 (1971), 95-104

あとがき

ここに載せる小論は，本年5月 名古屋大学数学教室において，佐藤幹夫が行なった集中講義および解析学セミナーにおける談話を浪川幸彦が記録整理したものである。原稿の作成はすべて浪川が行なった。校正その他を，柏原正樹と河合隆裕が担当した。原稿の浄書をして下さった河野和寿子さん，浅木須子さん，南裕子さんに感謝いたします。

（1971.9.3.）